

Моделирование транспортных процессов

СКИФ



Кафедра «Автосервис»

Лекционный курс

Автор

Ершов В.В.

Аннотация

Лекционный курс предназначен для студентов специальности 190700 «Организация перевозок и управление на транспорте».

Автор

Ершов Валерий Васильевич –

КАНДИДАТ ТЕХНИЧЕСКИХ НАУК, ДОЦЕНТ

Сфера научных интересов – транспортная инфраструктура

ОГЛАВЛЕНИЕ

Лекция 1. Транспортный процесс перевозки грузов	4
Лекция 2. Задачи оптимизации и их место в планировании перевозок	15
Лекция 3. Сущность и значение методов оптимизации	24
Лекция 4. Задачи линейного программирования	35
Лекция 5. Геометрическая интерпретация задач оптимизации.....	42
Лекция 6 . Симплексный метод с искусственным базисом	55
Лекция 7. Способы составления первого допустимого плана перевозок	71
Лекция 8 Методы маршрутизации перевозок грузов.....	90
Лекция 9. Методология решения задач маршрутизации подвижного состава	113
Лекция 10. Решение задачи оптимального объезда точек в маршрутах	126
Лекция 11. Постановка задач динамического программирования.....	135
Лекция 12. Корреляционно-регрессионные методы анализа и планирования	151
Лекция 13. Измерение тесноты корреляционной связи	164
Лекция 14. Методы оптимизации автотранспортных мощностей и их размещения	170
Лекция 15. Сетевые методы планирования и управления	181
Лекция 16. Общая характеристика и математический аппарат систем массового обслуживания.....	200
Лекция 17. Использование имитационного моделирования и деловых игр при анализе производственных ситуаций и принятии решений.	218
Лекция 18. Использование игровых методов при принятии решений в условиях риска и неопределенности.....	230

Лекция 1. Транспортный процесс перевозки грузов

Вопросы лекции:

1. Транспортный процесс и его элементы
2. Формирование показателей работы в транспортном процессе
3. Регулирование транспортной деятельности

Вопрос 1. Транспортный процесс и его элементы

Важную роль при выполнении грузовых автомобильных перевозок (ГАП) занимает организация движения ПС, так как от правильного выбора маршрута движения зависит доля порожнего пробега ПС в общем пробеге. Маршрутом движения называется путь следования ПС при выполнении перевозок. На всех маршрутах транспортный процесс перевозки грузов складывается из последовательно повторяющихся элементов: подача ПС к месту погрузки; погрузка ПС; перемещение груза; разгрузка ПС. Совокупность этих элементов, образующих законченную операцию доставки грузов, называется циклом перевозки, или ездой. время выполнения ездки:

$$t_e = t_{дв} + t_n + t_p + t_{np} = l_e / v_T + t_{п-р}, \quad (3.1)$$

где $t_{дв}$ — время движения; t_n — время погрузки; t_p — время разгрузки; t_{np} — время простоя по организационным причинам (оформление документов и т.п.); l_e — длина ездки; v_T — техническая скорость; $t_{п-р}$ — время погрузки и разгрузки.

Промежуточные заезды для частичной догрузки или разгрузки не прерывают цикла перевозки. Каждая новая ездка начинается только с момента подачи порожнего ПС.

Подача ПС от места стоянки и возврат после последнего пункта разгрузки относится не к отдельному циклу перевозок, а к работе ПС за день в целом и называется нулевым пробегом.

28

Совокупность элементов одного или нескольких циклов перевозки с момента подачи порожнего ПС в пункт погрузки до очередного возврата в этот же образует оборот автомобиля.

При выполнении ГАП можно выделить несколько типичных вариантов организации транспортного процесса.

1. Однократная или многократная перевозка груза одним автомобилем от одного и того же отправителя к одному и тому же потребителю {микросистема) представляет собой простейший вариант организации транспортного процесса. При этом варианте обратный пробег от потребителя к отправителю автомобиль выполняет без груза. На различных комбинациях микросистем основаны все остальные варианты организации транспортного процесса.

2. Однократная или многократная перевозка груза одним автомобилем от одного и того же отправителя к одному и тому же потребителю с доставкой груза в обратном направлении до отправителя или любого промежуточного пункта (особо малая система). Следует обратить внимание, что в этом случае вид и количество груза, перевозимого в прямом и обратном направлениях, как правило, различны.

3. Организация транспортного процесса в первом или втором вариантах с использованием нескольких единиц ПС, обслуживающих одного отправителя или потребителя грузов (малая система с челночным движением ПС). Для этого варианта сложность и требования к организации транспортного процесса существенно выше, так как требуется увязка работы нескольких автомобилей, составление графиков загрузки погрузочно-разгрузочных пунктов и т.д.

Во всех трех рассмотренных вариантах автомобиль перемещается от пункта к пункту по одному и тому же маршруту в прямом и обратном направлениях (рис. 3.1).

4. Однократная или многократная перевозка груза от нескольких отправителей к нескольким потребителям, при которой один или несколько автомобилей периодически возвращаются в пункт первой загрузки (малая система с кольцевым движением ПС). При этом варианте автомобиль за один оборот делает несколько остановок у отправителей и потребителей грузов (рис. 3.2). Обязательным требованием к данному варианту организации транспортного процесса является необходимость составления графика движения подвижного состава. Это связано с тем, что длина оборота

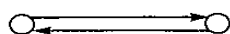


Рис. 3.1. Челночное движение подвижного состава в простейших вариантах организации транспортного процесса

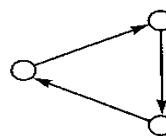


Рис. 3.2. Кольцевое движение подвижного состава

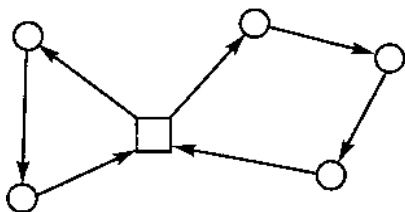


Рис. 3.3. Развоз или сбор груза

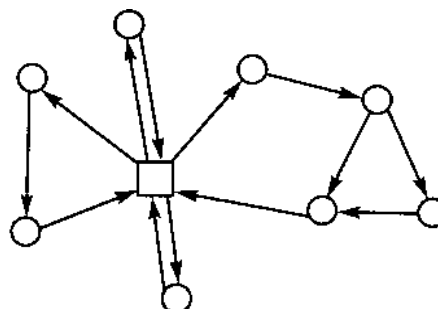


Рис. 3.4. Транспортный процесс обслуживания производственной структуры

при кольцевом движении, как правило, существенно больше, чем при челночном.

5. Развоз или сбор груза от одного отправителя или к одному потребителю (малая система с развозом или сбором груза). Схема перемещения автомобиля аналогична схеме малой системы с кольцевым движением ПС, но за оборот происходит только одна загрузка автомобиля и постепенная его разгрузка в нескольких пунктах при развозе груза и постепенная многократная загрузка и однократная разгрузка при сборе груза. Схема этого варианта организации транспортного процесса представлена на рис. 3.3.

6. Обслуживание определенной производственной структуры (предприятие, склад, терминал и т.д.) требует использования нескольких малых систем, работа которых будет подчинена одной цели (средняя система). Пример данного варианта организации транспортного процесса представлен на рис. 3.4.

7. Интегрированная транспортная система может обслуживать несколько производственных структур или определенный географический регион (большая система). В данном случае процессы перемещения грузов будут происходить между несколькими производственными предприятиями, складами или терминалами со сбором или развозкой груза отправителям и потребителям.

Пример данного варианта организации транспортного процесса представлен на рис. 3.5.

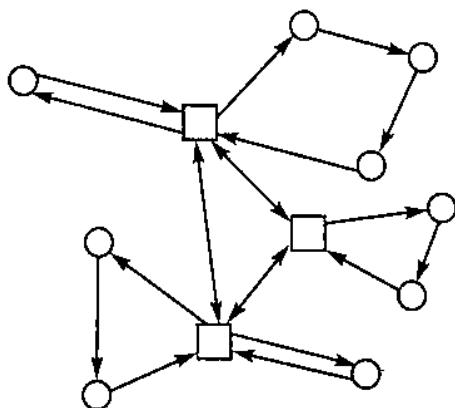


Рис. 3.5. Транспортный процесс обслуживания нескольких производственных структур

Вопрос 2. Формирование показателей работы в транспортном процессе

Для планирования, учета и анализа работы ПС установлена система технико-эксплуатационных показателей (ТЭП), позволяющих оценивать эффективность использования автомобилей и результаты их работы.

Списочным парком АТО называется весь подвижной состав, числящийся на балансе предприятия:

$$A_{сп} = A_{т} + A_{р},$$

где $A_{т}$ — число АТС, готовых к эксплуатации; $A_{р}$ — число АТС, требующих ремонта или находящихся в ремонте или техническом обслуживании.

$$A_{т} = A_{э} + A_{п},$$

где $A_{э}$ — число АТС, находящихся в эксплуатации (на линии); $A_{п}$ — число АТС, находящихся в простое из-за отсутствия работы, топлива, водителей и по другим организационным причинам.

Для учета использования парка за определенный период времени используют показатель «автомобиледень» — АД. Например, если в течение пяти дней в АТО 20 АТС работали на линии, два АТС находились в ремонте и один простаивал, то списочные ав- томобиледни равны

Моделирование транспортных процессов

$$АД_{сп} = АД_э + АД_р + АД_п = 20-5 + 2-5 + 1-5 = 115.$$

Эффективность работы парка ПС удобно оценивать рядом коэффициентов.

Коэффициент технической готовности определяет долю исправного (готового к эксплуатации) ПС в парке и характеризует техническое состояние парка АТС:

$$\alpha_T = A_T / A_{сп} = АД_T / АД_{сп} = Д_T / Д_K,$$

где $Д_x$ — дни пребывания АТС в готовом для эксплуатации состоянии; $Д_K$ — число календарных дней.

Коэффициент выпуска характеризует долю парка ПС, находящуюся в эксплуатации (на линии), относительно календарного времени:

$$\alpha_B = A_э / A_{сп} = АД_э / АД_{сп} = Д_э / Д_K, \quad (3.2)$$

где $Д_э$ — число дней эксплуатации.

Коэффициент использования характеризует долю парка ПС, находящуюся в эксплуатации (на линии), относительно рабочего времени:

$$a_{и} = АД_э / АД_р = Д_э / Д_р,$$

31

где $Д_р$ — число рабочих дней за рассматриваемый календарный период.

В отличие от коэффициента выпуска коэффициент использования более объективно оценивает эффективность использования ПС, так как учитывает режим работы АТО.

Пробегом называется расстояние, проходимое ПС за определенный период времени. Классификация различных видов пробега грузового ПС представлена на рис. 3.6. Нулевой пробег — это пробег, который необходимо совершить ПС для прибытия из АТО на первый пункт погрузки и возвращения после последней разгрузки в АТО.

Для повышения эффективности эксплуатации ПС необходимо стремиться к снижению величины непроизводительного пробега. Доля пробега с грузом в общем пробеге ПС оценивается *коэффициентом использования пробега*

$$\beta = L_r / L_{об}. \quad (3.3)$$

При расчетах обычно различают коэффициент использования пробега за езду

$$\beta_e = l_{e,r} / (l_{e,r} + l_x),$$

где $l_{e,r}$ — пробег с грузом за езду; l_x — пробег без груза за езду, и за рабочий день

$$\beta_{р.д} = L_r / (L_r + L_x + L_n).$$

Время пребывания АТС в наряде

$$T_H = T_M + t_n, \quad (3.4)$$

где T_M — время работы на маршруте; t_n — время на выполнение нулевого пробега.

Средняя продолжительность пребывания АТС в наряде за сутки характеризует эффективность использования парка по времени и считается как отношение общего количества автомобилечасов пребывания в наряде за отчетный период к общему количеству автомобиледней эксплуатации.

Моделирование транспортных процессов

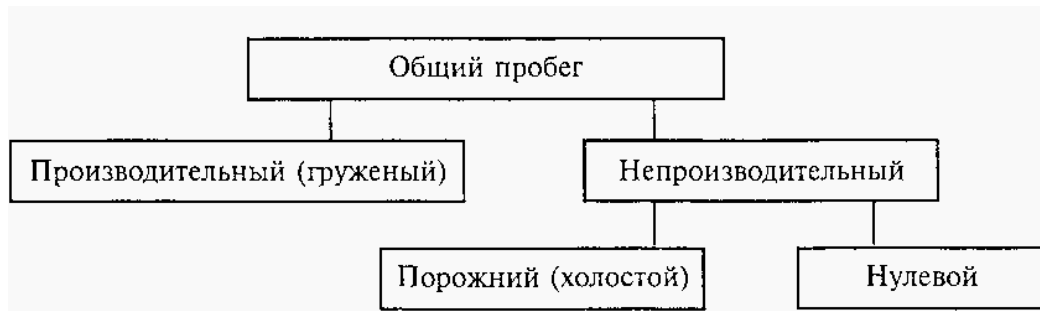


Рис. 3.6. Виды пробега грузового подвижного состава

32

Время работы на маршруте определяется соотношением

$$T_m = \sum t_{дв} + \sum t_{п-р} = (L_r + L_x) / v_t + \sum t_{п-р} = (L_r + L_x) / v_{\varepsilon} =$$

$$= n_e [(l_{\varepsilon, r} + l_x) / v_t + t_{п-р}] = n_e (l_{\varepsilon, r} / \beta_e v_t + t_{п-р}), \quad (3.5)$$

где v_t — техническая скорость; v_{ε} — эксплуатационная скорость; n_e — количество ездов, выполняемых ПС за смену.

Обратите внимание, что техническая скорость учитывает только время движения ПС, а эксплуатационная дополнительно учитывает время простоя ПС при выполнении погрузочно-разгрузочных работ.

На практике приходится на основании заданного времени работы ПС на маршруте определять возможное количество ездов

$$n_e = INT(T_m / t_e) = INT(T_m / (l_{\varepsilon, r} / (\beta_e v_t + t_{п-р}))), \quad (3.6)$$

где INT — функция, возвращающая ближайшее меньшее целое значение.

Производительность труда характеризуется количеством продукции, производимой в единицу времени. Транспортная продукция — это перемещение груза, следовательно, производительность ПС — это количество груза, перевозимого в единицу времени. Производительность ПС определяют в тоннах — U (или других физических единицах измерения массы, объема или количества груза, например m^3 , контейнеры и т.д.) и в тонна-километрах — W . За одну езду эти показатели составят

(3.7)

$$U_e = q_n \gamma; \quad W_e = U_e l_{\varepsilon, r}.$$

При определении производительности за

рабочий день ($U_{РАД}$, $W_{РАД}$) необходимо учитывать дискретный характер выполнения транспортной работы, когда она завершается одновременно с завершением езды, число которых, следовательно, может быть только целым. Таким образом, для увеличения объема работы ПС необходимо так изменить эксплуатационные условия (например, время работы), чтобы добиться увеличения числа ездов.

Действительно, выработка транспортной продукции происходит в течение того времени, пока ПС движется с грузом от отправителя к получателю, но как только автомобиль останавливается для разгрузки, выработка транспортной продукции прекращается и вновь возобновляется только после выезда из пункта погрузки. Количество доставленного груза может быть определено только в пункте

Моделирование транспортных процессов

разгрузки, и пока он не будет выгружен, нельзя говорить об объеме перевезенного груза. Таким образом, количество перевезенного груза и выполненной транспортной работы не является линейной функцией от времени работы автомобиля. Графически

33

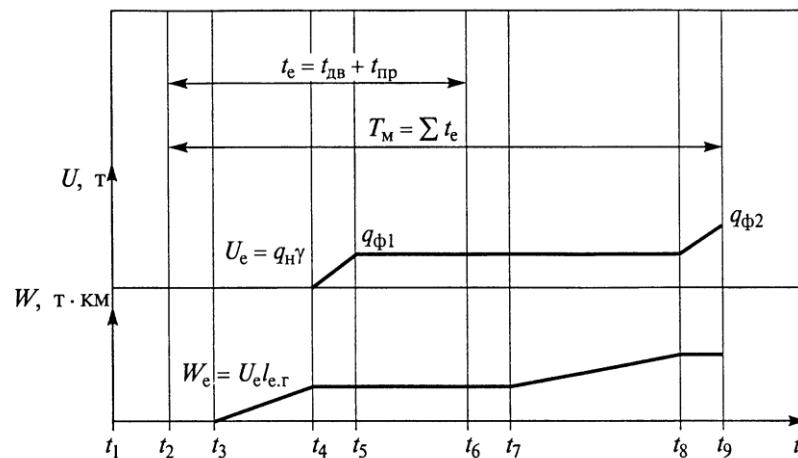


Рис. 3.7. Изменение транспортной продукции во времени

изменение количества транспортной продукции во времени представлено на рис. 3.7.

Автомобиль выезжает на линию в момент времени t_x . В момент времени t_2 началась первая погрузка груза в автомобиль, которая заканчивается в момент t_3 , и начинается движение с грузом. Прибытие в пункт назначения определяется моментом времени с которого начинается разгрузка груза, и в течение следующего периода разгрузки груз постепенно поступает потребителю. В момент окончания разгрузки t_5 заканчивается формирование объема груза, доставленного автомобилем за одну езду $d_{ф1}$. Затем автомобиль перемещается к отправителю для следующей погрузки, которая начинается в момент времени t_6 . Далее цикл транспортного процесса повторяется, и в момент времени t_9 у потребителя оказывается количество груза, равное $d_{ф2}$. Если на этом работа автомобиля заканчивается, то показатели работы автомобиля за смену следующие:

$$U_{р.д} = q_{ф1} + q_{ф2}; W_{р.д} = l_{е.г}(q_{ф1} + q_{ф2}).$$

Или в общем случае:

$$U_{р.д} = \sum q_{ф}; W_{р.д} = \sum q_{ф} l_{е.г}. \quad (3.8)$$

Для анализа эффективности использования ПС используют такие показатели производительности, как часовая производительность и производительность в тонна-километрах на 1 т грузоподъемности автомобиля в определенный временной промежуток.

Например, часовая производительность, т-км/ч, при выполнении ПС определенной езды может быть рассчитана по формулам

$$U_{ч} = q_{ф} / t_{е}; W_{ч} = U_{ч} L_{г}. \quad (3.9)$$

34

Производительность в тонна-километрах на 1 т грузоподъемности может определяться на количество автомобиле-тонна-часов наряда:

$$W_{тч} = \sum W / (q_{ср} \sum АЧ) = \gamma \beta v_3$$

Моделирование транспортных процессов

или на одну списочную автомобиле-тонну:

$$W_{ат} = \sum W / (q_{ср} A_{сп}) = \gamma \beta v_3 T_H D_p,$$

где $q_{ср}$ — средняя грузоподъемность списочного АТС; АЧ — число автомобилечасов в наряде.

Количество АТС, необходимых для выполнения заданного объема работ, определяется из соотношения

$$A_3 = CEILING(Q / U_{р.д}), \quad (3.10)$$

где CEILING — функция, возвращающая ближайшее большее целое значение; Q — заданный объем перевозки груза за смену.

Задача 3.1. Автомобиль КамАЗ-53212 ($q_H = 10$ т) перевозит груз первого класса ($\gamma = 1$) на расстояние $l_{ег} = 40$ км, при этом $l_x = 40$ км, $l_H = 10$ км, $v_3 = 20$ км/ч, $v_T = 30$ км/ч, $T_H = 8,3$ ч. Определить производительность ПС за смену (U и W).

Решение. Определяем время на нулевой пробег
 $= 4/4 = 10/30 = 0,3$ ч.

По формуле (3.4) время работы на маршруте

$$T_M = T_H - t_H = 8,3 - 0,3 = 8,0 \text{ ч.}$$

Время одной ездки по формуле (3.1)

$$4 = (4 + l_x)M = (40 + 40)/20 = 4 \text{ ч.}$$

Число ездок определяем по формуле (3.6):

$$j_e = INT(T_H t_e) = INT(8/4) = 2.$$

По формулам (3.8) производительность за день:

$$U_{рд} = g_{нупт} = 10 \cdot 1 - 2 = 20 \text{ т}; \quad Ж_{рл} = U_{р} J_{ес} = 20 \cdot 4 = 80 \text{ т-км.}$$

Задача 3.2. Автомобиль выезжает из АТО в 8 ч, а возвращается в 17 ч, продолжительность обеда 1 ч. Эксплуатационная скорость 20 км/ч; $a_B = 0,8$; $P = 0,6$. Определить общий и груженный пробег этого автомобиля за год. Решение. Время в наряде составит

$$Г_{„} = 17 - 8 - 1 = 8 \text{ ч.}$$

За смену пробег автомобиля равен

$$l_{сут} = T_H v_3 = 8 \cdot 20 = 160 \text{ км.}$$

35

Вопрос 3. Регулирование транспортной деятельности

Длительный опыт работы транспорта в рыночных условиях в ведущих государствах мира показал, что регулирование транспортной деятельности необходимо по следующим основным причинам: необходимость поддержания общественной безопасности как с точки зрения безопасности дорожного движения, так и для гарантий функционирования экономики и ликвидации чрезвычайных происшествий;

высокий уровень естественного монополизма на транспорте; жесткая конкуренция на рынке автоперевозок; необходимость перераспределения прибыли в обеспечивающую автоперевозки инфраструктуру (дороги, АЗС, сервис и т.п.); выполнение обязательств по межгосударственным соглашениям; существенное социальное значение транспорта. История управления АТ в СССР берет начало от Постановления ЦИК Совнаркома СССР от 12.01.28, которым было

Моделирование транспортных процессов

образовано Центральное управление дорожным транспортом — Цудор- транс. В 1939 г. был принят Закон СССР об образовании в союзных республиках народных комиссариатов автомобильного транспорта, во исполнение которого был создан Наркомат автомобильного транспорта РСФСР. В 1946 г. Наркомат автотранспорта был переименован в Министерство автомобильного транспорта РСФСР. Министерство на основе иерархической структуры управлений АТ на местах, крупных автотранспортных объединений обеспечивало управление всем транспортом общего пользования в республике и в значительной степени определяло условия работы ведомственных АТО.

С 1990 г. центральным органом управления автотранспортной деятельностью в РФ является федеральный орган исполнительной власти — Министерство транспорта Российской Федерации

51

(Минтранс РФ), который обеспечивает проведение государственной политики и общее государственное управление и регулирование транспортного комплекса.

Транспортный комплекс составляют зарегистрированные на территории РФ юридические лица и индивидуальные предприниматели, осуществляющие на воздушном, речном, морском, автомобильном, городском электрическом транспорте перевозочную и транспортно-экспедиционную деятельность, проектирование, строительство, ремонт и содержание автодорог и сооружений на них, работы, связанные с обслуживанием других путей сообщения, с проведением научных исследований и подготовкой кадров, а также организации, выполняющие иную связанную с транспортным процессом работу.

Основными задачами Минтранса РФ являются:

- формирование и реализация государственной транспортной политики;
- разработка стратегии развития транспорта и реализация общетранспортных федеральных целевых программ;
- общее руководство, государственный контроль и координация деятельности различных видов транспорта;
- руководство проведением экономических реформ и структурной перестройкой на транспорте;
- формирование и совершенствование правовых основ функционирования транспортного комплекса;
- представление интересов транспортного комплекса РФ на международном рынке транспортных услуг.

Для управления работой отдельных видов транспорта в составе Минтранса имеются соответствующие службы. Регулирование деятельности транспортных предприятий выполняет Федеральная служба по надзору в сфере транспорта (Ространснадзор), которая имеет территориальные управления. Территориальные управления Федеральной службы по надзору непосредственно контактируют с организациями и индивидуальными предпринимателями, работающими в сфере транспортного комплекса, и свою работу согласовывают с местными органами власти. В первую очередь это касается формирования государственного заказа на общественно необходимые перевозки, социально значимые перевозки и т. п.

В соответствии с Положением о Федеральной службе по надзору в сфере транспорта, утвержденным Постановлением Правительства РФ от 30.07.2004 № 398, ее основными задачами являются:

- осуществление государственного контроля соблюдения юридическими лицами и индивидуальными предпринимателями (субъектами транспортного комплекса) нормативных правовых и технических актов, регламентирующих

Моделирование транспортных процессов

деятельность транспортного комплекса, а также соблюдения лицензионных требований

52

и условий субъектов, деятельность которых подлежит лицензированию Минтрансом РФ;

- лицензирование отдельных видов деятельности, отнесенных Минтрансом РФ к компетенции Ространснадзора;
- осуществление транспортного контроля выполнения международных автомобильных перевозок в пунктах пропуска АТС через государственную границу и в контрольных пунктах на территории РФ.

Территориальные отделения Ространснадзора для реализации возложенных на них задач:

ведут реестр выданных лицензий и формируют перечень субъектов, осуществляющих транспортную деятельность, ведут мониторинг и статистическое наблюдение их деятельности;

оказывают содействие правоохранительным органам по выявлению противоправной деятельности субъектов транспортного комплекса;

осуществляют контроль исполнения субъектами, осуществляющими лицензируемую деятельность, федеральных законов, иных нормативных актов РФ, а также лицензионных требований и условий (плановые проверки могут проводиться не чаще одного раза в два года);

осуществляют лицензирование отдельных видов деятельности; участвуют в разработке и контроле реализации субъектами транспортного комплекса мер по повышению безопасности движения и снижению вредного воздействия транспорта на окружающую среду, по поддержанию находящихся в эксплуатации АТС в технически исправном состоянии;

содействуют созданию условий для функционирования рынка транспортных услуг, а также защите прав потребителей и законных интересов производителей этих услуг;

обеспечивают взаимодействие Минтранса РФ с полномочными представителями Президента РФ в федеральных округах;

проводят контроль соблюдения иностранными и российскими перевозчиками, осуществляющими международные перевозки, международных договоров и нормативных правовых актов РФ в этой области;

оказывают содействие в организации перевозки сил, средств и материальных ресурсов, необходимых для ликвидации чрезвычайных ситуаций и осуществления эвакуационных мероприятий;

обеспечивают контроль, организуют и проводят аттестацию исполнительных руководителей и специалистов, ответственных за безопасность движения;

осуществляют производство по делам об административных правонарушениях; участвуют в информационном обеспечении субъектов транспортного комплекса и органов государственной власти.

53

Моделирование транспортных процессов

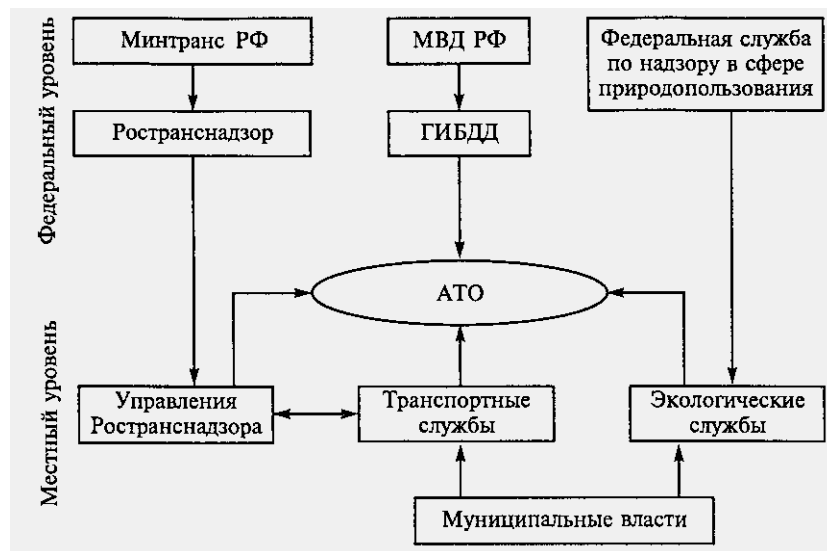


Рис. 5.1. Государственное регулирование автотранспортной деятельности

Схема государственного регулирования деятельности автотранспортного предприятия без учета экономических факторов представлена на рис. 5.1.

Таким образом, в настоящее время деятельность автоперевозчика, с одной стороны, регулируется государственными нормативными правовыми актами, а с другой стороны, определяется конкурентной рыночной средой, в которой работает данная организация.

На рис. 5.2 приведены основные методы регулирования транспортной деятельности, которые воздействуют на работу перевозчика.

Основным методом регулирования работы автоперевозчика в мировой практике является лицензирование. В РФ лицензирование осуществляется на основании Федерального закона «О лицензировании отдельных видов деятельности» № 128-ФЗ от 13.07.2001 (с изм. на основании Федерального закона № 80-ФЗ от 02.07.2005). Следует обратить внимание, что этот закон не распространяется на осуществление международных автомобильных перевозок. По сравнению с 1990-ми гг. методы, связанные с регулированием рынка ГАП, в нашей стране имеют все более ограниченное применение.

Отношения, возникающие в процессе планирования, организации и выполнения перевозок, регулируются нормативными актами государственного законодательства, составляющими систему гражданского права. Наиболее важные принципиальные положения деятельности перевозчика, его взаимоотношения с обслужи-

Моделирование транспортных процессов

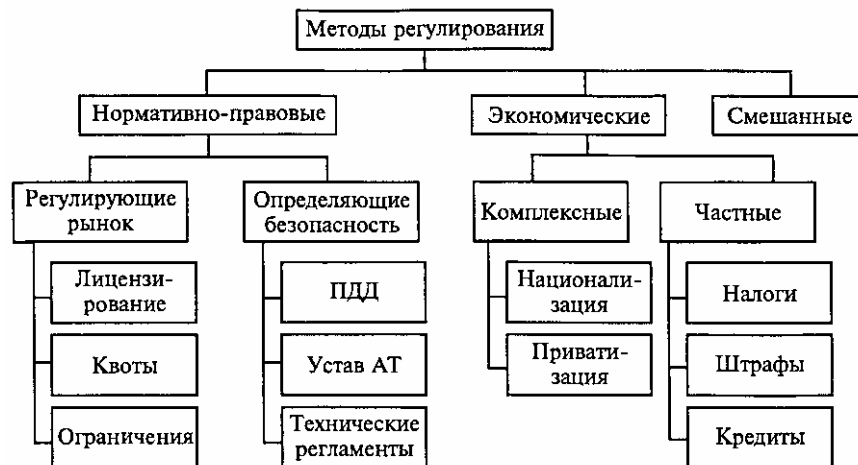


Рис. 5.2. Основные методы регулирования транспортной деятельности

ваемой клиентурой и партнерами определяет глава 40 Гражданского кодекса РФ (часть вторая), принятого Государственной Думой 22.12.95.

5.2. Устав автомобильного транспорта

Устав автомобильного транспорта является важнейшим документом, регламентирующим деятельность субъектов автомобильного транспорта и отношения между ними.

В настоящее время на территории РФ действует Устав автомобильного транспорта и городского наземного электрического транспорта (в ред. Федерального закона от 08.11.2007 № 259-ФЗ), который является важнейшим документом, регламентирующим деятельность субъектов автомобильного транспорта и отношения между ними. Устав состоит из восьми глав и 44 статей.

Глава 1 «Общие положения» (ст. 1—7) включает в себя основные понятия и определения, используемые в Уставе.

Глава 2 «Перевозки грузов» (ст. 8—18) устанавливает, что заключение договора перевозки груза подтверждается транспортной накладной; определяет права и обязанности грузоотправителя, грузополучателя и перевозчика по договору перевозки в отношении предоставления груза и транспортных средств, выполнения ПРР, пломбирования транспортных средств (контейнеров), определения массы груза, очистки транспортных средств (контейнеров); устанавливает, что груз можно считать утраченным после 10 дней со дня приема груза (в городском и пригородном сообщении) и после 30 дней со дня, когда груз должен был быть доставлен грузоперевозчиком в междугородном сообщении.

55

Контрольные вопросы

1. Дать определение маршрута движения ПС при выполнении перевозок.
2. Дать определение цикла перевозки.
3. Дать определение оборота автомобиля.
4. Типичные варианты организации транспортного процесса.
5. Назначение системы технико-эксплуатационных показателей.
6. Чем оценивается эффективность работы парка ПС?
7. Охарактеризовать понятие «Коэффициент технической готовности».
8. Охарактеризовать понятие «Коэффициент выпуска».
9. Охарактеризовать понятие «Коэффициент использования».
10. Что называется пробегом ПС?

11. Классификация различных видов пробега.
12. Чем обусловлена необходимость регулирования транспортной?
13. Основные задачи Минтранса РФ?

Лекция 2. Задачи оптимизации и их место в планировании перевозок

Вопросы лекции:

4. Принципы планирования грузовых перевозок
5. Задачи оптимизации и их место в планировании перевозок

Вопрос 1. Принципы планирования грузовых перевозок

Планирование грузовых перевозок подразделяется на перспективное, текущее и оперативное планирование.

Перспективное (стратегическое) планирование включает в себя разработку основных направлений и показателей деятельности на длительный период от 5 до 15 лет. В его рамках все расчеты выполняются на основании прогнозов развития экономических и социальных процессов в регионе и анализа рыночной конъюнктуры. При перспективном планировании большое значение имеет правильное использование современных методов прогнозирования.

Прогнозируемые объемы перевозок промышленных грузов определяются относительно объемов существующих перевозок и прогнозов развития промышленности по следующей формуле:

$$Q_{\text{п}} = Q_{\text{с}} K_{\text{и}} K_{\text{п}},$$

где $Q_{\text{п}}$ — прогнозируемый объем грузов, перевозимых автотранспортом, тыс. т; $Q_{\text{с}}$ — фактический объем грузов, перевозимых автотранспортом в существующий период, тыс. т; $K_{\text{и}}$ — коэффициент изменения объема промышленных грузов к прогнозируемому сроку; $K_{\text{п}}$ — коэффициент повторности перевозок промышленных грузов, $K_{\text{п}} = 1,05 \dots 1,2$.

$$K_{\text{и}} = K_{\text{сн}} V_{\text{п}} / V_{\text{с}},$$

где $K_{\text{сн}}$ — коэффициент, учитывающий снижение материалоемкости промышленного производства и снижение объемов автомобильных перевозок, приходящихся на 1 млн р. валовой продукции промышленности, ориентировочно $K_{\text{сн}} = 0,95 \dots 0,98$; $V_{\text{п}}$ — валовая продукция промышленности к прогнозируемому сроку, млн р.; $V_{\text{с}}$ — валовая продукция промышленности на существующий период, млн р.

172

Прогнозируемый объем перевозок строительных грузов определяется исходя из планируемых объемов строительства отдельно по строительству промышленных и гражданских объектов.

Объем перевозок для грузов промышленного строительства рассчитывается по формуле

Моделирование транспортных процессов

$$Q_{\pi} = K_{\pi} \{ K_{\pi} [0,01 \Sigma (C_{\pi} H_{\pi c}) + 0,005 \Sigma (C_{\pi} H_{\pi c})] + \\ + 0,01 [\Sigma C_{\pi} + 0,5 \Sigma (C_{\pi} H_{\pi m})] \} / Y,$$

где K_{π} — коэффициент неравномерности строительства по годам, $K_{\pi} = 1,3 \dots 1,4$; K_{π} — коэффициент повторности перевозок грузов промышленного строительства, $K_{\pi} = 1,1 \dots 1,4$; C_{π} — стоимость промышленного строительства, выполняемого в расчетный период, млн р.; $H_{\pi c}$ — средние нормы расхода строительных материалов, деталей и конструкций, тыс. т на 100 тыс. р. сметной стоимости строительно-монтажных работ в зависимости от отрасли промышленности; $\#_{\pi c}$ — средняя норма расхода строительных материалов и конструкций на 100 тыс. р. стоимости ремонта, $\#_{\pi c} = 4,0 \dots 6,0$ тыс. т; $\#_{\pi m}$ — средняя норма образования строительного мусора на 100 тыс. р. стоимости промышленного строительства и ремонта, $\#_{\pi m} = 1,5 \dots 2,0$ тыс. т; Y — количество лет в рассматриваемом периоде.

Объем перевозок для грузов гражданского строительства определяется по следующей формуле:

$$Q_{\pi} = K_{\pi} \{ K_{\pi} [\Sigma (C_{\pi} H_{\pi j}) + 0,01 \Sigma (C_{\pi-6} H_{\pi-6}) + \\ + 0,01 \Sigma (C_{\pi} H_{\pi n}) + 0,001 \Sigma (R H_{\pi r})] + 0,01 \Sigma (C_{\pi} + C_{\pi-6} + C_{\pi} + R) H_{\pi m} \} / Y,$$

где $C_{\pi j}$ — объем строительства нового жилищного фонда, прогнозируемый на рассматриваемый период, тыс. м² общей площади; $H_{\pi j}$ — средние нормы расхода строительных материалов и конструкций на одну тысячу кв. метров общей площади, тыс. т; $C_{\pi-6}$ — стоимость строительства новых учреждений культурно-бытового обслуживания, млн р.; $\#_{\pi-6}$ — средняя норма расхода строительных материалов на 100 тыс. р. сметной стоимости строительно-монтажных работ по учреждениям культурно-бытового назначения, $\#_{\pi-6} = 4,3 \dots 4,8$ тыс. т; $C_{\pi n}$ — стоимость нового коммунального строительства и инженерного оборудования, млн р.; $\#_{\pi n}$ — средняя норма расхода строительных материалов на 100 тыс. р. сметной стоимости строительно-монтажных работ коммунального строительства и инженерного оборудования, $\#_{\pi n} = 4,0 \dots 6,0$ тыс. т; R — стоимость ремонта объектов жилищного, культурно-бытового и коммунального строительства (принимается в размере 10...20% общей стоимости нового строительства); Y_{π} — средняя норма расхода строительных материалов на

173

100 тыс. р. сметной стоимости ремонтных строительно-монтажных работ, $Y_{\pi} = 2,0 \dots 3,0$ тыс. т; $Y_{\pi m}$ — норма строительного мусора от всех видов гражданского строительства на 100 тыс. р., $Y_{\pi m} = 2,0 \dots 3,0$ тыс. т.

Для расчетных целей можно принять следующие средние показатели массы строительных материалов в зависимости от типа жилищного строительства в тыс. т на 1 тыс. м²:

деревянные дома.....	2,0
каменные дома 2-этажные.....	5,6
каменные дома 3-этажные.....	5,9
каменные дома 4-этажные.....	5,6
каменные дома 5-этажные.....	5,3
крупнопанельные дома 3 — 5 этажей..	4,3...4,4
крупнопанельные дома 12—16 этажей	4,2

Прогнозирование объемов перевозки потребительских грузов выполняется по нормам или уровню потребления на одного человека с учетом массы перевозимой тары и повторности перевозок:

Моделирование транспортных процессов

$$Q_{\text{п}} = (1 + K_{\text{пр}})H_{\text{пот}}NK_{\text{т}}K_{\text{п}}K_{\text{дн}} + Q_{\text{оч}} + Q_{\text{т}},$$

где $K_{\text{пр}}$ — коэффициент, учитывающий долю промтоварных грузов по отношению к продовольственным грузам, принимаемым за единицу, $K_{\text{пр}} = 0,25...0,35$; $H_{\text{пот}}$ — норма потребления продовольственных товаров на одного человека в год, $H_{\text{пот}} = 1,0... 1,3$ т; N — численность населения; $K_{\text{т}}$ — коэффициент, учитывающий дневное население региона как частное от деления суммарного населения при маятниковой миграции на численность постоянного населения; $K_{\text{т}}$ — коэффициент, учитывающий массу тары, $K_{\text{т}} = 1,1... 1,2$; $K_{\text{п}}$ — коэффициент повторности перевозок потребительских грузов, $K_{\text{п}} = 1,3... 1,5$; $Q_{\text{оч}}$ — масса грузов очистки, включающая перевозки твердых бытовых отходов (0,2 т на одного жителя в год), уличного смёта (0,05 т на жителя) и снега (0,25 т на жителя); $Q_{\text{т}}$ — масса топливных грузов, включающая перевозки жидкого топлива (0,05...0,01 т на одного жителя в год) и твердого топлива для загородных домов (0,5 т на жителя).

При планировании провозных возможностей парка АТС используется формула

$$Q = D_{\text{к}}\alpha_{\text{в}}\sum(A_{\text{сп}}U_{\text{р.д}})_i,$$

где индекс i обозначает перебор списочного состава парка грузовых АТС по моделям, выполняющих определенное суточное задание.

На коэффициент выпуска $\alpha_{\text{в}}$ при стабильной организации работы основное влияние оказывает время простоя ПС при выполнении технического обслуживания и ремонта. Необходимо учесть

174

вать, что после 4...5 лет эксплуатации ПС эти простои резко увеличиваются, что влечет соответствующее снижение $\alpha_{\text{в}}$.

Объем груза, который перевозится за смену, $f/p_{\text{д}}$, помимо других факторов, зависит от дорожных условий, технической скорости ПС на линии, надежности АТС. Техническая скорость ПС с большими сроками службы снижается как за счет ухудшения тягово-динамических качеств, так и в связи с увеличением простоев на линии для устранения мелких неисправностей. Некоторые зависимости технико-эксплуатационных показателей работы АТС от дорожных условий и срока службы приведены в Приложении 3.

Текущее планирование проводится на год. В этом случае возможный объем работы и необходимые для его выполнения ресурсы рассчитываются на основании имеющихся и подготовленных к заключению договоров.

При расчете ресурсов, необходимых для освоения объемов работ по договорам, используют коэффициент запаса, который должен учитывать выработку ресурса ПС и возможность выполнения разовых заказов.

При составлении годового плана работы АТО по перевозкам грузов рассчитываются следующие показатели по типам ПС: коэффициент выпуска и использования парка АТС; автомобиледни в работе; возможные объемы перевозок; годовой пробег, в том числе с грузом; требуемые ресурсы для поддержания АТС в работоспособном состоянии, расход топлива и ГСМ; себестоимость перевозок.

Оперативное планирование — это конкретизация плановых заданий по времени выполнения, в пространстве (по местам выполнения производственных заданий), по специфике технологии и организации производства управляемого объекта (структура ПС, ПРМ, выбор технологии и т.д.). Оперативное планирование включает в себя разработку планов работы в целом АТО и конкретных АТС и водителей на месяц, неделю и смену. В процессе оперативного планирования решаются следующие задачи:

Моделирование транспортных процессов

- расчет провозных возможностей АТО;
- расчет оптимальных маршрутов движения ПС;
- составление почасовых графиков работы ПС;
- составление плана работ по клиентуре;
- расчет предполагаемых затрат и необходимых ресурсов для выполнения перевозок;
- составление сменно-суточного плана работы АТО, графика выпуска ПС на линию и оформление путевой документации.

Основным документом оперативного планирования является сменно-суточный план.

Сменно-суточный план при сдельном использовании ПС включает в себя следующие показатели:

- номер заявки или договора на перевозку;
- наименование заказчика;
- наименование груза, расстояние и объем перевозки;
- пункт погрузки и пункт выгрузки груза, способ выполнения ПРР;
- время подачи ПС под первую погрузку;
- количество выделенных АТС по маркам по плану и фактически (фактические показатели заполняются после обработки путевой документации);
- объем выполненной работы (количество ездов, перевезенных тонн груза, общий пробег и с грузом).

При повременном использовании ПС в сменно-суточном плане отражается время предоставления и продолжительность работы АТС у заказчика по маркам ПС.

С одной стороны, сменно-суточный план составляется на основании данных о потребностях в перевозках, которые складываются из заключенных АТО договоров и поступивших разовых заявок на перевозки. С другой стороны, оцениваются провозные возможности АТО на основании данных об исправном ПС и готовых к работе водителях.

Вопрос 2. Задачи оптимизации и их место в планировании перевозок

В настоящее время одним из главных путей повышения качества и эффективности работы АТ является выбор вариантов использования АТС, который включает в себя целый ряд задач, при решении каждой из которых, начиная с получения заказа на выполнение перевозок, из множества вариантов должен выбираться оптимальный, т.е. наилучший. В зависимости от вида решаемой задачи выбирается конкретный показатель, для которого стремятся найти наилучшее значение (например, минимальный пробег АТС, максимальная прибыль и т.д.). Такой показатель называется критерием оптимальности и является функцией независимых параметров (исходных данных) задачи

$$F = F(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Уменьшение или увеличение значения критерия оптимальности определяется необходимостью выполнения различных требований заказчика, дорожными условиями, техническими параметрами АТС, ПРМ и т.д.

Показатели и характеристики, на значения которых наложены ограничения, являются также функциями независимых параметров и называются функциями ограничений, которые могут задаваться в виде равенств и неравенств:

$$R_i = R_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \doteq 0; R_j = R_j(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq 0; x_k \leq 0.$$

176

При решении задач оптимизации необходимо определить и обосновать критерий оптимальности и четко выделить показатели и характеристики, принимаемые в качестве ограничений.

Совокупность формул, позволяющая для заданного набора значений параметров x_1, x_2, \dots , рассчитать значения функций ограничений и критерия оптимальности, называется математической моделью.

Особенности задач оптимизации на транспорте. Широкое использование методов оптимизации на АТ неразрывно связано с развитием средств вычислительной техники, которая позволяет находить оптимальные решения в оперативном режиме, с учетом быстро меняющейся обстановки. Объективная предпосылка использования методов оптимального планирования перевозок заключается в том, что все задачи перевозочного процесса — задачи с экстремумом, причем определение наилучших решений вызывается условиями дефицитности, ограниченности заданных ресурсов.

Таким образом, выбор оптимального варианта — очередной, закономерный этап более высокой организации планирования и управления АТ. Впервые методы оптимального планирования работы АТ начали разрабатываться в связи с ростом объемов перевозок и числа используемых транспортных средств. Одной из первых работ, посвященной оптимальному распределению транспортных потоков в сетях, является работа А.Н.Толстого, выполненная в 1930 г. в АН СССР. В 1940 - 50-х гг. под руководством Л. В. Канторовича были разработаны многочисленные методы решения классической транспортной задачи линейного программирования¹. В Национальном вычислительном центре Великобритании, например, этими проблемами стали заниматься лишь в 1968 г.

Специфические свойства задач планирования перевозочного процесса, особенно задач оперативного планирования, которые вызвали необходимость привлечения математического аппарата и современных средств вычислительной техники, следующие.

1. Подавляющее число таких задач являются многовариантными. Многообразие типов АТС, большое число пунктов их размещения, пунктов погрузки и разгрузки приводит к громадному числу возможных вариантов доставки грузов (например, при решении задачи закрепления восьми потребителей за пятью поставщиками возможны сотни миллионов вариантов). При решении практических задач, как правило, участвуют десятки АТО, сотни поставщиков (ТОП) и тысячи потребителей (ГПП).

2. Задачи характеризуются ограниченностью времени на обработку исходной информации, так как хотя и имеет место забла

177

временное поступление первичной информации (декадное, пятидневное, месячное), ежедневно и даже ежечасно приходит скорректированная информация, неучет которой может привести к искажению реальной ситуации, к получению не нужных для практики результатов.

3. Значительные исходные размеры задач. Это свойство особенно характерно для крупных промышленных центров, где насчитывается большое число АТО, ГОП и ГПП.

4. Наличие большого числа существенных ограничений, неучет которых может привести к недопустимым вариантам транспортировки. Это прежде всего ограничения:

по времени работы АТС на линии;

Моделирование транспортных процессов

времени простоя под погрузкой и разгрузкой;
пропускной способности ГОП и ГПП;
времени вывоза и доставки грузов;
зависимости между типом АТС и видом груза и т.д.

5. Различная периодичность решения. Так, попытки решения задач маршрутизации на любой плановый период, кроме сменно-суточного, оказывались бесплодными. Период решения задач оптимизации грузопотоков во многом зависит от уровня организации, от технологических свойств поставляемых грузов и т.д.

6. При планировании перевозочного процесса число пунктов разгрузки намного превышает число пунктов погрузки. Это требует проведения специальных исследований и предварительных мероприятий, связанных с агрегированием (объединением) пунктов потребления грузов (ГПП), что приводит, с одной стороны, к снижению трудоемкости расчетов на ЭВМ, а с другой стороны — увеличивает затраты на обработку информации и приводит к определенным отклонениям от наилучших результатов.

Оптимальное планирование грузовых перевозок в России. В нашей стране практическое внедрение методов оптимального планирования на автомобильном транспорте началось с 1959 г. Первой реализованной задачей было оперативное планирование вывоза готовой продукции с кирпичных заводов Москвы. До настоящего времени их реализация прошла ряд этапов.

1. Использование известных классических моделей оптимизации транспортного процесса охватывает 1959—1962 гг. и характеризуется попыткой «привязать» эти модели в сложившихся условиях существующей организации работы автотранспорта без каких бы то ни было изменений.

2. Создание моделей, учитывающих реальные ограничения практической деятельности при перевозке грузов автотранспортом. Этот период (1962—1966) характеризуется изучением и учетом требований, выдвигаемых практикой, разработкой более эффективных алгоритмов, совершенствованием процесса подготовки необхо-

178

димой информации для решения задач грузовых автомобильных перевозок.

3. Создание автоматизированных систем перевозочного процесса на автомобильном транспорте. Этот период, продолжавшийся с 1967 по 1980-е гг., характеризуется качественным наращиванием математического аппарата, созданием программных комплексов, стыковкой задач планирования перевозочного процесса с информационно-вычислительным комплексом и т.д. В этот период на автомобильном транспорте были созданы мощные кустовые вычислительные центры (КВЦ) и начато создание вычислительных центров коллективного пользования (ВЦКП). Крупнейший в системе Минавтотранса РСФСР — Ленинградский КВЦ Главленавтотранса в год производил информационной продукции на сумму 2,52 млн р. в ценах 1980 г.

4. Период, начавшийся с начала 1980-х гг., характерен углублением развития третьего периода за счет совершенствования оперативного управления перевозочным процессом. Это стало возможным благодаря появлению персональных ЭВМ (ПЭВМ), которые позволяют в каждой организации, связанной с управлением перевозочным процессом, создать автоматизированные рабочие места (АРМ). Раньше КВЦ работали в отрыве от действующего перевозочного процесса и имели весьма ограниченные возможности по реагированию на быстроменяющуюся оперативную обстановку, так как обменивались с

Моделирование транспортных процессов

потребителем в основном бумажной документацией. Теперь, с помощью АРМ, расположенных в АТО, местах погрузки и разгрузки, а при необходимости и на маршруте перевозки грузов имеется возможность организации единого информационного пространства, работающего в режиме реального времени.

Таким образом, если при отсутствии системы автоматизированного управления оперативные сбои транспортного процесса ликвидировали, полагаясь только на интуицию и опыт диспетчера, то теперь появилась возможность в систему планирования автомобильных перевозок включить «обратную связь», что поднимает весь процесс управления перевозочным процессом на качественно новый уровень.

Автоматизированные рабочие места в зависимости от состава могут обладать следующими возможностями:

- видеотерминал и печатающее устройство обеспечивают передачу информации и ответы на запросы;
- интеллектуальный терминал (микро-ЭВМ) обеспечивает дополнительную обработку информации и решение небольших задач;
- автономная ПЭВМ обеспечивает дополнительно решение задач по планированию перевозок и анализу оперативной информации.

179

При создании автоматизированной системы перевозочного процесса необходимо достаточно четко очертить круг задач, решение которых необходимо для эффективного ее функционирования. В перевозочном процессе можно выделить следующие задачи:

- подготовка исходной информации: определение кратчайших расстояний, компоновка информации, микро- и макрорайонирование, создание моделей транспортной сети и т.д.;
- оптимизация грузопотоков, т.е. закрепление ГОП за ГПП;
- маршрутизация, помашинные и мелкопартионные отправки грузов;
- комплексные задачи рационализации и координации работы транспортных и сбытовых организаций;
- выбор конкретного типа АТС для выполнения перевозок в заданных условиях.

Основные методы оптимального планирования грузовых автомобильных перевозок. В зависимости от решаемой задачи в практике планирования перевозок для получения оптимальных решений применяют различные математические методы. В связи с тем, что в качестве критерия оптимальности, как правило, используют экономические показатели, часто такие методы носят название экономико-математических. Классификация основных методов, применяемых при оптимизационном планировании перевозок, представлена на рис. 8.1.

Линейное программирование — это математическая дисциплина, с помощью которой выполняется анализ и решение экстремальных задач с линейными связями и ограничениями. Здесь термин «программирование» является синонимом термина «планирование», т.е. подразумевается составление плана оптимального решения задачи.

Таким образом, экономическое содержание задач линейного программирования — отыскание наилучших способов использо-

Моделирование транспортных процессов



Рис. 8.1. Классификация основных методов оптимального Планирования перевозок

180

вания наличных ресурсов, когда условия задачи выражаются системой линейных уравнений (равенств или неравенств), содержащих неизвестные только первой степени. Многие задачи планирования грузовых автоперевозок имеют именно такое содержание. Например, закрепление грузополучателей (ГПП) за грузоотправителями (ГОП), распределение автомобилей по объектам и маршрутам и т.д.

Для любых задач линейного программирования характерны следующие три условия:

- наличие системы взаимосвязанных факторов;
- строгое определение критерия оптимальности;
- точная формулировка условий, ограничивающих использование наличных ресурсов.

В математической форме общая задача линейного программирования состоит в максимизации или минимизации линейной функции

$$F = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$$

от n вещественных переменных x_1, x_2, \dots, x_n , удовлетворяющих условиям неотрицательности ($x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0$) и m линейным ограничениям

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq (=, \geq) b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \leq (=, \geq) b_2, \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \leq (=, \geq) b_m. \end{cases}$$

Среди ограничений могут одновременно встречаться знаки «>», «<» и «=». Значения c_i и b_j предполагаются известными.

В линейном программировании имеются различные методы решения соответствующих планово-экономических задач. Если имеются всего две переменные, может быть использован графический метод решения. Однако на практике для решения подавляющего большинства задач используются специальные эвристические алгоритмы, основные из которых будут рассмотрены ниже.

К математическому программированию относятся также и методы нелинейного программирования. Соответствующие задачи в этом случае описываются нелинейными уравнениями.

Свойство нелинейности состоит в том, что результат взаимодействия двух факторов не равен простой алгебраической сумме их действий. Функция принимает экстремальные значения в точках, в которых значение ее первой

Моделирование транспортных процессов

производной равно нулю, т.е. необходимое условие минимума или максимума функции $f'(x) = 0$.

Первая производная будет равна нулю и в точке перегиба функции, поэтому достаточное условие достижения минимума $f''(x^*) > 0$,

181

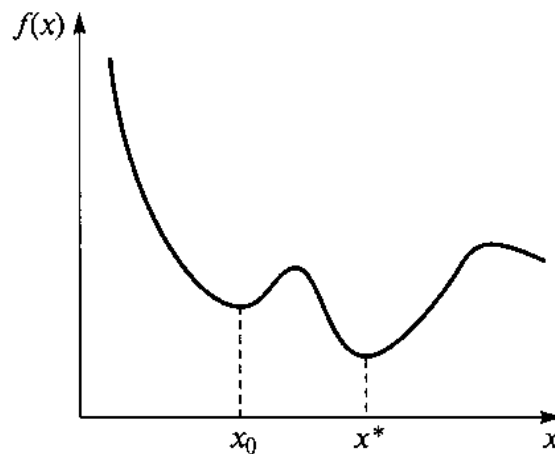


Рис. 8.2. Поиск минимума функции

а максимума $f''(x_0) < 0$, где x_0 — точка предполагаемого минимума или максимума.

Функция $f(x)$ имеет локальный минимум, если существует окрестность точки x_0 такая, что для всех значений x в этой окрестности $f(x) > f(x_0)$.

Функция $f(x)$ имеет глобальный минимум в точке x^* , если для всех x справедливо неравенство $f(x) \geq f(x^*)$.

Таким образом, решение задачи нелинейного программирования состоит в определении глобального экстремума (рис. 8.2).

Для решения практических задач, относящихся к классу задач нелинейного программирования, как правило, приходится применять достаточно сложные алгоритмы, на практике реализуемые только при помощи ЭВМ.

Некоторые задачи планирования грузовых автоперевозок связаны с принятием ряда последовательных и поэтапных решений. Для решения таких задач используются методы динамического программирования, в основе которых лежит совокупность приемов, позволяющих находить оптимальные решения, основанные на вычислении последствий каждого из принятых решений и выработке оптимальных стратегий для последующего решения.

Кроме методов математического программирования, в решении планово-экономических задач находят применение методы, созданные в прикладной математике. Эти методы базируются на теории вероятностей, математической статистике и теории массового обслуживания. При построении стохастических моделей исходят из вероятностной трактовки экономического процесса и его параметров. При этом каждой входящей в модель величине приписывается не одно какое-либо число, а указывается вероятностный закон распределения значений этой величины и характеристики этого распределения (математическое ожидание, дисперсия и т.д.).

Контрольные вопросы

1. Разновидности планирования грузовых перевозок.
2. Характеристика перспективного планирования.
3. Сроки перспективного планирования.

Моделирование транспортных процессов

4. Исходя из чего определяется *прогнозируемый* объем перевозок строительных грузов?
5. Характеристика текущего планирования.
6. Сроки текущего планирования.
7. Характеристика оперативного планирования.
8. Задачи, решаемые в процессе оперативного планирования.
9. Какие показатели включает сменно-суточный план при сдельном использовании ПС?
10. Классификация основных методов, применяемых при оптимизационном планировании перевозок.
11. В чем состоит свойство нелинейности.

Лекция 3. Сущность и значение методов оптимизации

Вопросы лекции:

6. Сущность и значение методов оптимизации
7. Основы матричного исчисления

Задачи линейного программирования

Вопрос 1. Сущность и значение методов оптимизации

В плановых и организационно-экономических задачах, решаемых на автомобильном транспорте, приходится учитывать большое количество факторов, условий, ограничений, изучить которые непосредственно нет возможности. Поэтому при решении таких задач реальный экономический процесс или явление заменяются моделями.

Модель - это аналог, макет или иной вид отражения наиболее важных черт, свойств или результатов какого-либо процесса, системы или явления. В экономике применяются главным образом математические модели, представляющие собой компактную формализованную запись всей совокупности условий экономической задачи в виде символов, индексов, уравнений, функций и других математических выражений.

Преимущества математического моделирования перед другими видами (графическим, аналоговым, механическим и т.п.) заключаются в широком использовании математических моделей, низкой стоимости их создания, быстром получении результатов исследований, возможности проведения расчетных экспериментов и проверки правильности построения модели.

В процессе математического моделирования можно выделить четыре основных этапа.

I этап. Постановка и формулирование проблемы или задачи. Это наиболее ответственный этап в моделировании, поскольку от того, насколько глубоко изучена сущность процесса и выделены его характерные черты, как будет сформулирована цель решения и осуществлена постановка задачи, зависит в конечном счете и результат решения.

II этап. Подготовка исходной информации, необходимой для решения задачи. Здесь важно прежде всего установить показатель, достаточно полно характеризующий качество экономического процесса и с помощью которого

Моделирование транспортных процессов

сравниваются и оцениваются различные варианты решения и выбирается наилучший. Этот показатель и принимается за критерий оптимальности. В качестве критерия в различных экономических задачах могут быть: максимальная прибыль, минимальные издержки автотранспорта, минимальные приведенные затраты на эксплуатацию подвижного состава и т.д. При построении модели экономического процесса в качестве критерия оптимальности

4

выбирают показатель, который в данном случае является наиболее важным.

III этап. Разработка экономико-математической модели и получение на ее основе соответствующего решения. При составлении математической модели следует отбирать самые существенные факторы, от которых зависит выбор правильного решения задачи. Главное при этом - избежать переусложнения или переупрощения модели. Модель не должна быть сложнее, чем это требуется по заданной точности исходных данных и требуемой точности результатов.

IV этап. Анализ и экспериментальная проверка степени адекватности модели исследуемому экономическому процессу. Только после такой проверки следует принимать окончательное решение. Лучшей математической моделью считается та, которая позволяет получить наиболее рациональное решение. Практическая реализация решения и служит окончательным критерием качества созданной модели.

Рассмотрим процесс математического моделирования на простейшем примере.

1. Допустим, перед предприятием поставлена цель получить наибольшую общую прибыль от производства двух видов изделий.

2. Изучение и анализ производства позволили установить, что изделия изготавливают из материалов А и В, запасы которых ограничены. Запасы материала А составляют 300 кг, материала В - 200 кг. На одно изделие первого вида расход материала А составляет 6 кг, материала В - 2 кг. На одно изделие второго вида расход материала А - 2 кг, материала В - 4 кг. От реализации одного изделия первого вида будет получена прибыль 4 р., второго изделия - 6 р.

3. При построении математической модели задачи рассуждаем следующим образом. При ограниченных ресурсах материалов необходимо организовать производство двух видов изделий, количество которых следует определить. Обозначим через x_1 - искомое количество выпуска изделий первого вида, через x_2 - искомое количество выпуска изделий второго вида.

Учитывая нормы расхода материалов на производство изделий, запишем в математической форме условие общего расхода материала А

$$6x_1 + 2x_2.$$

Суммарный расход материала А не должен превышать имеющихся ресурсов, т.е. должно соблюдаться условие:

$$6x_1 + 2x_2 \leq 300.$$

Аналогичное ограничение по использованию материала В:

$$2x_1 + 4x_2 \leq 200.$$

5

По условию задачи необходимо найти такие значения x_1 и x_2 которые обеспечат предприятию наибольшую прибыль. Суммарная прибыль выразится величиной $4x_1 + 6x_2$, которую и нужно максимизировать.

Моделирование транспортных процессов

Исходя из сути искомым переменных x_1 и x_2 , устанавливаем, что ни одна из них не должна быть отрицательной величиной, поскольку производство продукции не может характеризоваться отрицательным показателем. Условие неотрицательности переменных запишем как $x_1 > 0$ и $x_2 > 0$.

С учетом всех перечисленных условий математическая модель задачи выглядит следующим образом:

максимизировать целевую функцию $4x_1 + 6x_2$ шах при ограничениях по ресурсам

$$6x_1 + 2x_2 \leq 300;$$

$$2x_1 + 4x_2 \leq 200$$

и переменным $x_1 \geq 0; x_2 \geq 0$.

Конечно, рассмотренная упрощенная модель далека от реальных задач оптимального планирования на автомобильном транспорте. Однако она является достаточно наглядной и позволяет рассмотреть возможности и методику решения задач оптимизации, поскольку даже в таком упрощенном примере существует множество вариантов комбинаций производства изделий этих двух видов в различных соотношениях.

Графическое решение данной математической модели изложено в п. 2.1.

Математические методы оптимизации основаны на применении теории математического программирования при решении планово-экономических задач. Эти методы позволяют составить программу (план), обеспечивающую оптимальное использование ресурсов. Обязательным условием при этом является наличие нескольких альтернативных решений задачи, из которых выбирается наилучший вариант. Математическое программирование объединяет несколько видов программирования: линейное, нелинейное, динамическое, целочисленное, стохастическое, регрессионный анализ, теорию массового обслуживания. Наиболее разработанными для применения в планово-экономических расчетах являются методы линейного программирования.

Задачи линейного программирования прежде всего отличаются тем, что они описывают линейные, пропорциональные зависимости между рассматриваемыми величинами. Математическая модель задачи линейного программирования включает в себя: линейную целевую функцию» линейные ограничения на используемые ресурсы, переменные величины.

6

Целевая функция строится на основе выбранного критерий оптимальности, в соответствии с которым решается вопрос о выборе оптимального варианта, путем сравнения различных возможных вариантов.

Ограничения определяют границы развития данной системы с точки зрения необходимых для этого ресурсов.

Переменные величины - искомые задачи линейного программирования.

Процесс решения задач линейного программирования многошаго* вый и заключается в том, что по определенным правилам выбирается начальный вариант решений, который затем с каждым последующим шагом улучшается, и конечный итог - это получение наилучшего с точки зрения критерия оптимальности решения, обеспечивающего максимум или минимум целевой функции.

Моделирование транспортных процессов

К задачам нелинейного программирования относятся такие, в которых целевая функция или ограничения, а иногда то и другое отражены в нелинейной форме, т.е. переменные в соответствующие выражения входят в степени выше первой.

Динамическое программирование используется при решении экономических задач, параметры которых изменяются во времени, т.е. имеют динамический характер. Процесс решения таких задач распадается на несколько этапов. На каждом этапе определяется оптимальное решение для части неизвестных, которое и служит исходным условием для определения оптимального решения следующего этапа. Оптимальный план последнего этапа является оптимальным решением всей задачи динамического программирования.

Целочисленность в математическом программировании означает получение решения только в целых числах.

В стохастических моделях исходят из вероятностной трактовки экономического процесса и его параметров, каждой входящей в модель величине приписывается не одно какое-либо число, а указываются только вероятностный закон распределения ее значения и характеристики такого распределения (математическое ожидание, дисперсия и т.п.).

Одним из методов, целиком базирующихся на теории вероятностей, является метод корреляционного анализа. Корреляционный анализ позволяет исследовать взаимосвязи экономических показателей и, что очень важно, оценить силу этой связи. При этом исходят из того, что изучаемое явление имеет случайный, вероятностный характер и подчинено соответствующим статистическим законам. С помощью корреляционного анализа можно построить математическую модель закономерности изменения основного Показателя в связи с изменением факторов, на него влияющих. Эту закономерность называют регрессией, а анализ ее свойств - регрессионным анализом.

Методы теории массового обслуживания применяются там, где возникает потребность в массовом обслуживании. Например, автомобильные перевозки можно рассматривать как систему массового обслуживания; работа пунктов погрузки также основана на принци

7

пах теории массового обслуживания и т.д. Общей особенностью задач, связанных с массовым обслуживанием, является случайный характер исследуемого процесса. Число требований на обслуживание и временные интервалы между их поступлением носят случайный характер, их нельзя предсказать с однозначной определенностью. Однако в совокупности множество таких требований подчиняется определенным статистическим закономерностям, изучение которых и является предметом теории массового обслуживания. Под качеством обслуживания понимается своевременное обслуживание поступивших в систему требований. Основными показателями эффективного обслуживания считаются длина очереди, время ожидания в очереди, процент отказов в обслуживании, число простаивающих аппаратов обслуживания. Перечень этих показателей дает представление о характере решаемых задач.

Сетевое планирование и управление является эффективным методом календарного планирования и управления. В качестве информационной динамической модели, отражающей процесс выполнения какого-либо комплекса работ и его конечную цель, в системах СДУ используют сетевой график, который позволяет получить существенные преимущества по сравнению с традиционными методами планирования и управления.

Сетевой график включает в себя только те работы, от которых действительно зависит реализация проекта. Для каждой из работ определены сроки и резервы времени. Работы, у которых нет резервов времени, называют напряженными или критическими. Эти работы и обуславливают общую продолжительность выполнения всего комплекса работ. Особый контроль за выполнением критических работ позволяет обеспечить своевременность выполнения проекта и даже сокращение сроков за счет передачи части средств с ненапряженных на критические работы. Выявление критических работ и оценка резервов для не критических работ и составляют содержание сетевого метода планирования и управления.

Математическую основу методов оптимизации составляют понятия из линейной алгебры, сведения из теории выпуклых множеств и линейных неравенств. Чтобы лучше понять математическую природу изучаемых далее производственных задач в области организации и планирования автомобильного транспорта, необходимо вспомнить основные положения указанных дисциплин.

ГЛАВА 3 ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

§ 7. Задачи линейного программирования

В предыдущих главах мы занимались только методологией исследования операций — классификацией задач, подходами к их решению и т. д., оставляя в стороне математический аппарат. В этой и последующих главах мы бегло рассмотрим некоторые из математических методов, широко применяемых в исследовании операций. В подробности этих методов не будем входить (научиться их применять по этой книжке нельзя); главное внимание обратим на их принципиальные основы.

Выше мы уже упоминали о самых простых задачах, где выбор показателя эффективности (целевой функции) W достаточно явно диктуется целевой направленностью операции, а ее условия известны заранее (детерминированный случай). Тогда показатель эффективности зависит только от двух групп параметров: заданных условий a и элементов решения x , т. е.

$$W = W(a, x). \quad (7.1)$$

Напомним, что в числе заданных условий a фигурируют и ограничения, налагаемые на элементы решения. Пусть решение x представляет собой совокупность n элементов решения x_1, x_2, \dots, x_n (иначе — n -мерный вектор):

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Требуется найти такие значения x_1, x_2, \dots, x_n , которые обращают величину W в максимум или в минимум (оба слова в математике объединяются под одним термином «экстремум»)/

Такие задачи — отыскания значений параметров, обеспечивающих экстремум функции при наличии ограничений, наложенных на аргументы, носят общее название задач математического программирования¹⁾.

Трудности, возникающие при решении задач математического программирования, зависят: а) от вида

52

функциональной зависимости, связывающей W с элементами решения, б) от «размерности» задачи, т. е. от количества элементов решения x_1, x_2, \dots, x_n и в) от вида и количества ограничений, наложенных на элементы решения.

Моделирование транспортных процессов

Среди задач математического программирования самыми простыми (и лучше всего изученными) являются так называемые задачи линейного программирования. Характерно для них то, что: а) показатель эффективности (целевая функция) W линейно зависит от элементов решения x_1, \dots, x_n и б) ограничения, налагаемые на элементы решения, имеют вид линейных равенств или неравенств относительно x_1, \dots, x_n .

Такие задачи довольно часто встречаются на практике, например, при решении проблем, связанных с распределением ресурсов, планированием производства, организацией работы транспорта и т. д. Это и естественно, так как во многих задачах практики «расходы» и «доходы» линейно зависят от количества закупленных или утилизированных средств (например, суммарная стоимость партии товаров линейно зависит от количества закупленных единиц; оплата перевозок производится пропорционально весам перевозимых грузов и т. д.).

Разумеется, нельзя считать, что все встречающиеся на практике типы зависимостей линейны; можно ограничиться более скромным утверждением, что линейные (и близкие к линейным) зависимости встречаются часто, а это уже много значит.

Приведем несколько примеров задач линейного программирования.

1. Задача о пищевом рационе. Ферма производит откорм скота с коммерческой целью. Для простоты допустим, что имеется всего четыре вида продуктов: P_1, P_2, P_3, P_4 ; стоимость единицы каждого продукта равна соответственно c_1, c_2, c_3, c_4 . Из этих продуктов требуется составить пищевой рацион, который должен содержать: белков – не менее b_1 единиц; углеводов – не менее b_2 единиц; жиров – не менее b_3 единиц. Для продуктов P_1, P_2, P_3, P_4 содержание белков, углеводов и жиров (в единицах на единицу продукта) известно и задано в таблице 7.1, где a_{ij} ($i = 1, 2, 3, 4; j = 1, 2, 3$) – какие-то определенные числа; первый индекс указывает

53

номер продукта, второй – номер элемента (белки, углеводы, жиры)¹⁾.

Требуется составить такой пищевой рацион (т. е. назначить количества продуктов P_1, P_2, P_3, P_4 , входящих в него), чтобы условия по белкам, углеводам и жирам были выполнены и при этом стоимость рациона была минимальна.

Составим математическую модель (в данном случае это очень просто). Обозначим x_1, x_2, x_3, x_4 – количества продуктов P_1, P_2, P_3, P_4 , входящих в рацион. Показатель эффективности, который требуется минимизировать, – стоимость рациона (обозначим ее L); она линейно зависит от элементов решения x_1, x_2, x_3, x_4 .

$$L = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + c_4x_4,$$

или, короче,

$$L = \sum_{i=1}^4 c_i x_i. \quad (7.2)$$

Таблица 7.1

ПРОДУКТ	Элементы
---------	----------

Моделирование транспортных процессов

	белки	углевод ы	жиры
П ₁	a ₁₁	a ₁₂	a ₁₃
П ₂	a ₂₁	a ₂₂	a ₂₃
П ₃	a ₃₁	a ₃₂	a ₃₃
П ₄	a ₄₁	a ₄₂	a ₄₃

Итак, вид целевой функции известен и она линейна. Запишем теперь в виде формул ограничительные условия по белкам, углеводам и жирам. Учитывая, что в одной единице продукта П₁ содержится единиц белка, в x_1 единицах – $a_{11}x_1$ единиц белка, в x_2 единицах продукта П₂ содержится $a_{21}x_2$ единиц белка и т. д., получим три неравенства:

$$\left. \begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + a_{31}x_3 + a_{41}x_4 &\geq b_1, \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_{32}x_3 + a_{42}x_4 &\geq b_2, \\ a_{13}x_1 + a_{23}x_2 + a_{33}x_3 + a_{43}x_4 &\geq b_3. \end{aligned} \right\} \quad (7.3)$$

Эти линейные неравенства представляют собой ограничения, накладываемые на элементы решения x_1, x_2, x_3, x_4 .

54

Таким образом, поставленная задача сводится к следующей: найти такие неотрицательные значения переменных x_1, x_2, x_3, x_4 , чтобы они удовлетворяли ограничениям — неравенствам (7.3) и одновременно обращали в минимум линейную функцию этих переменных:

$$L = \sum_{i=1}^4 c_i x_i \Rightarrow \min.$$

Перед нами — типичная задача линейного программирования. Не останавливаясь пока на способах ее решения, приведем еще три примера аналогичных задач.

2. Задача о планировании производства. Предприятие производит изделия трех видов: U_1, U_2, U_3 . По каждому виду изделия предприятию спущен план, по которому оно обязано выпустить не менее b_1 единиц изделия U_1 , не менее b_2 единиц изделия U_2 и не менее b_3 единиц изделия U_3 . План может быть перевыполнен, но в определенных границах; условия спроса ограничивают количества произведенных единиц каждого типа: не более соответственно $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ единиц. На изготовление изделий идет какое-то сырье; всего имеется четыре вида сырья: s_1, s_2, s_3, s_4 причем запасы ограничены числами Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 единиц каждого вида сырья. Теперь надо указать, какое количество сырья каждого вида идет на изготовление каждого вида изделий. Обозначим a_{ij} количество единиц сырья вида B ($i = 1, 2, 3, 4$), потребное на изготовление одной единицы изделия U_j ($j = 1, 2, 3$). Первый индекс у числа a_{ij} — вид изделия, второй — вид сырья. Значения a_{ij} сведены в таблицу (матрицу) — см. таблицу 7.2.

Таблица 7.2

Моделирование транспортных процессов

При реализации одно изделие U_1 приносит предприятию прибыль c_1 , U_2 — прибыль c_2 , U_3 — прибыль c_3 . Требуется так спланировать производство (сколько каких изделий производить), чтобы план был выполнен или перевыполнен (но при отсутствии «затоваривания»), а суммарная прибыль обращалась в максимум.

55*

Запишем задачу в форме задачи линейного программирования. Элементами решения будут x_1, x_2, x_3 , — количества единиц изделий U_1, U_2, U_3 , которые мы произведем. Обязательность выполнения планового задания запишется в виде трех ограничений-неравенств:

$$x_1 \geq b_1, \quad x_2 \geq b_2, \quad x_3 \geq b_3. \quad (7.4)$$

Отсутствие излишней продукции (затоваривания) даст нам еще три ограничения-неравенства:

$$x_1 \leq \beta_1, \quad x_2 \leq \beta_2, \quad x_3 \leq \beta_3. \quad (7.5)$$

Кроме того, нам должно хватить сырья. Соответственно четырем видам сырья будем иметь четыре ограничения-неравенства:

$$\left. \begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + a_{31}x_3 &\leq \gamma_1, \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_{32}x_3 &\leq \gamma_2, \\ a_{13}x_1 + a_{23}x_2 + a_{33}x_3 &\leq \gamma_3, \\ a_{14}x_1 + a_{24}x_2 + a_{34}x_3 &\leq \gamma_4. \end{aligned} \right\} \quad (7.6)$$

Прибыль, приносимая планом (x_1, x_2, x_3) будет равна

$$L = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3. \quad (7.7)$$

Таким образом, мы снова получили задачу линейного программирования: найти (подобрать) такие неотрицательные значения переменных x_1, x_2, x_3 , чтобы они удовлетворяли неравенствам-ограничениям (7.4), (7.5), (7.6) и, вместе с тем, обращали в максимум линейную функцию этих переменных:

$$L = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 \Rightarrow \max. \quad (7.8)$$

Задача очень похожа на предыдущую, разница в том, что неравенств-ограничений здесь больше и вместо «минимума» стоит «максимум» (а мы уже знаем, что это несущественно).

В следующей задаче мы уже встретимся с другим видом ограничений.

3. Задача о загрузке оборудования. Ткацкая фабрика располагает двумя видами станков, из них N_1 станков типа 1 и N_2 станков типа 2. Станки могут производить три вида тканей: T_1, T_2, T_3 , но с разной производительностью. Данные производительности станков даны в таблице 7.3 (первый индекс — тип станка, второй — вид ткани).

56

Каждый метр ткани вида T_1 приносит фабрике доход c_1 вида T_2 — доход c_2 , T_3 — доход c_3 .

Фабрике предписан план, согласно которому она должна производить в месяц не менее b_1 метров ткани T_1 , b_2 метров ткани T_2 , b_3 метров ткани T_3 ; количество метров каждого вида ткани не должно превышать соответственно β_1 , β_2 , β_3 метров. Кроме того, все без исключения станки должны быть загружены. Требуется так распределить загрузку станков производством тканей T_1 , T_2 , T_3 , чтобы суммарный месячный доход был максимален.

На первый (легкомысленный) взгляд поставленная здесь задача — родная сестра предыдущей. Рука так и тянется обозначить x_1 , x_2 , x_3 количества тканей T_1 , T_2 , T_3 в плане и максимизировать суммарный доход $c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3$. Но не торопитесь и спросите себя: а где же тут возможности оборудования? Поразмыслив, мы увидим, что в этой задаче элементы решения — не количества тканей каждого вида, а количества станков типов 1 и 2, занятых производством тканей каждого вида. Здесь удобно обозначить элементы решения буквами x с двумя индексами (первый — тип станка, второй — вид ткани). Всего будет шесть элементов решения:

$$\left. \begin{array}{ccc} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \end{array} \right\}. \quad (7.9)$$

Здесь — количество станков типа 1, занятых изготовлением ткани T_1 , x_{12} — количество станков типа 1, занятых изготовлением ткани T_2 и т. д.

Перед нами — еще одна задача линейного программирования. Запишем сначала условия-ограничения, наложенные на элементы решения x_{ij} . Прежде всего

$$\left. \begin{array}{l} a_{11}x_{11} + a_{21}x_{21} \geq b_1, \\ a_{12}x_{12} + a_{22}x_{22} \geq b_2, \\ a_{13}x_{13} + a_{23}x_{23} \geq b_3. \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} \text{обеспечим} \\ \text{выполнение} \\ \text{плана. Это даст нам три} \\ \text{неравенства-ограничения:} \end{array} \quad (7.10)$$

57

После этого ограничим перевыполнение плана; это даст нам еще три неравенства-ограничения:

$$\left. \begin{array}{l} a_{11}x_{11} + a_{21}x_{21} \leq \beta_1, \\ a_{12}x_{12} + a_{22}x_{22} \leq \beta_2, \\ a_{13}x_{13} + a_{23}x_{23} \leq \beta_3. \end{array} \right\} \quad (7.11)$$

Теперь запишем ограничения, связанные с наличием оборудования и его полной загрузкой. Суммарное количество станков типа 1, занятых изготовлением всех тканей, должно быть равно N_1 типа 2 — N_2 . Отсюда еще два условия — на этот раз равенства:

$$\left. \begin{array}{l} x_{11} + x_{12} + x_{13} = N_1, \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} = N_2. \end{array} \right\} \quad (7.12)$$

Моделирование транспортных процессов

Теперь запишем суммарный доход от производства всех видов тканей. Суммарное количество метров ткани T_1 , произведенное всеми станками, будет равно $a_{11} \cdot x_{11} + a_{21} x_{21}$ и принесет доход $c_1(a_{11} \cdot x_{11} + a_{21} x_{21})$. Рассуждая аналогично, найдем суммарный доход фабрики за месяц при плане (7.9):

$$L = c_1(a_{11}x_{11} + a_{21}x_{21}) + c_2(a_{12}x_{12} + a_{22}x_{22}) + \\ + c_3(a_{13}x_{13} + a_{23}x_{23}),$$

или, гораздо короче,

$$L = \sum_{j=1}^3 c_j \sum_{i=1}^2 a_{ij}x_{ij}. \quad (7.13)$$

Эту линейную функцию шести аргументов мы хотим обратить в максимум:
 $L \rightarrow \max$.

Перед нами — опять задача линейного программирования: найти такие неотрицательные значения переменных $x_{11}, x_{12}, \dots, x_{23}$, яц, которые, во-первых, удовлетворяли бы ограничениям-неравенствам (7.10), (7.11), во-вторых — ограничениям-равенствам (7.12) и, наконец, обращали бы в максимум линейную функцию этих переменных (7.13). В этой задаче линейного программирования шесть ограничений-неравенств и два ограничения-равенства.

4. Задача о снабжении сырьем. Имеются три промышленных предприятия: Π_1, Π_2, Π_3 , требующих снабжения определенным видом сырья. Потребности в 58

сырье каждого предприятия равны соответственно a_1, a_2, a_3 единиц. Имеются пять сырьевых баз, расположенных от предприятий на каких-то расстояниях и связанных с ними путями сообщения с разными тарифами. Единица сырья, получаемая предприятием Π_i с базы B_j , обходится предприятию в c_{ij} рублей (первый индекс — номер предприятия, второй — номер базы, см. таблицу 7.4).

Предприятие	База				
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
Π_1	c_{11}	c_{12}	c_{13}	c_{14}	c_{15}
Π_2	c_{21}	c_{22}	c_{23}	c_{24}	c_{25}
Π_3	c_{31}	c_{32}	c_{33}	c_{34}	c_{35}

Возможности снабжения сырьем с каждой базы ограничены ее производственной мощностью: базы B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 могут дать не более $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5$ единиц сырья. Требуется составить такой план снабжения, чтобы потребности предприятий были обеспечены при минимальных расходах на сырье.

Моделирование транспортных процессов

Опять поставим задачу линейного программирования. Обозначим количество сырья, получаемое г-м предприятием с /-й базы. Всего план будет состоять из 15 элементов решения:

$$\left. \begin{array}{ccccc} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} & x_{15} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} & x_{25} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} & x_{35} \end{array} \right\}. \quad (7.14)$$

Введем ограничения по потребностям. Они состоят в том, что каждое предприятие получит нужное ему количество сырья (ровно столько, сколько ему требуется):

$$\left. \begin{array}{l} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} = a_1, \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25} = a_2, \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} + x_{35} = a_3. \end{array} \right\}. \quad (7.15)$$

Далее

напишем ограничения-неравенства, вытекающие

59

из производственных мощностей баз:

$$\left. \begin{array}{l} x_{11} + x_{21} + x_{31} \leq b_1, \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} \leq b_2, \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} \leq b_3, \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} \leq b_4, \\ x_{15} + x_{25} + x_{35} \leq b_5. \end{array} \right\}. \quad (7.16)$$

Наконец, запишем суммарные расходы на сырье, которые мы хотим минимизировать. С учетом данных табл. 7.4 получим (пользуясь знаком двойной суммы):

$$L = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^5 c_{ij} x_{ij} \Rightarrow \min. \quad (7.17)$$

Опять перед нами задача линейного программирования: найти такие неотрицательные значения переменных x_{ij} , которые удовлетворяли бы ограничениям- равенствам (7.15), ограничениям-неравенствам (7.16) и обращали бы в минимум их линейную функцию (7.17).

Таким образом, мы рассмотрели несколько задач линейного программирования. Все они сходны между собой, разнятся только тем, что в одних требуется обратить линейную функцию в максимум, в других – в минимум; в одних ограничения – только неравенства, в других – как равенства, так и неравенства. Бывают задачи линейного программирования, где все ограничения – равенства. Эти различия несущественны, так как от ограничений-неравенств легко переходить к ограничениям-равенствам и обратно, как будет показано в следующем параграфе.

Контрольные вопросы:

1. Чем обусловлены сложности решения плановых и организационно-экономических задач на автомобильном транспорте.
2. Роль моделей при исследовании реальных экономических процессов на автомобильном транспорте.
3. Преимущества математического моделирования при исследовании процессов на автомобильном транспорте.
4. Основные этапы процесс математического моделирования.
5. На чем основаны математические методы оптимизации при решении планово-экономических задач?
6. Отличие задач линейного программирования от других математических методы оптимизации.
7. В чем заключается процесс решения задач линейного программирования?
8. При решении каких задач используется динамическое программирование?
9. Что означает целочисленность в математическом программировании.
10. Существо метода корреляционного анализа.
11. Где применяются методы теории массового обслуживания?
12. Существо сетевого планирования и управления.

Лекция 4. Задачи линейного программирования

Вопросы лекции:

1. Основная задача линейного программирования
2. Двойственность задач линейного программирования

Вопрос 1. Основная задача линейного программирования

Любую задачу линейного программирования можно свести к стандартной форме, так называемой «основной задаче линейного программирования» (ОЗЛП), которая формулируется так: найти неотрицательные значения переменных x_1, x_2, \dots, x_n , которые удовлетворяли бы условиям-равенствам

$$\left. \begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2, \\ \dots &\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned} \right\} \quad (8.1)$$

60

и обращали бы в максимум линейную функцию этих переменных:

$$L = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \rightarrow \max. \quad (8.2)$$

Убедимся в этом. Во-первых, случай, когда L надо обратить не в максимум, а в минимум, легко сводится к предыдущему, если попросту изменить знак L на обратный (максимизировать не L , а $L' = -L$). Кроме того, от любых условий-неравенств можно перейти к условиям-равенствам ценой введения некоторых

Моделирование транспортных процессов

новых «дополнительных» переменных. Покажем, как это делается, на конкретном примере.

Пусть требуется найти неотрицательные значения переменных x_1, x_2, x_3 , удовлетворяющие ограничениям-неравенствам

$$\left. \begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 - x_3 &\geq 4, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 &\leq 10 \end{aligned} \right\} \quad (8.3)$$

и обращающие в максимум линейную функцию от этих переменных:

$$L = x_1 - x_2 + 2x_3 \rightarrow \max. \quad (8.4)$$

Начнем с того, что приведем условия (8.3) к стандартной форме, так, чтобы знак неравенства был \geq справа стоял нуль. Получим:

$$\left. \begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 - x_3 - 4 &\geq 0, \\ -x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 10 &\geq 0. \end{aligned} \right\} \quad (8.5)$$

А теперь обозначим левые части неравенств (8.5) соответственно через y_1 и y_2 :

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= 3x_1 + 2x_2 - x_3 - 4, \\ y_2 &= -x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 10. \end{aligned} \right\} \quad (8.6)$$

Из условий (8.5) и (8.6)

видно, что новые переменные y_1 и y_2 также должны быть неотрицательными.

Какая же теперь перед нами стоит задача? Найти неотрицательные значения переменных x_1, x_2, x_3, y_1, y_2 такие, чтобы они удовлетворяли условиям-равенствам (8.6) и обращали в максимум линейную функцию этих переменных (то, что в L не входят дополнительные переменные y_1, y_2 , неважно: можно считать, что они входят, но с нулевыми коэффициентами). Перед нами –

61

основная задача линейного программирования (ОЗЛП). Переход к ней от первоначальной задачи с ограничениями-неравенствами (8.3) «куплен» ценой увеличения числа переменных на два (число неравенств).

Возможен и обратный переход: от ОЗЛП к задаче с ограничениями-неравенствами. Пусть перед нами основная задача линейного программирования с ограничениями-равенствами (8.1). Предположим, что среди этих t равенств линейно независимыми являются $g < t$. В линейной алгебре доказывается (см., например, [4]), что максимальное число линейно независимых равенств, связывающих p переменных x_1, \dots, x_p , равно g , так что вообще $g \leq p$. В линейной алгебре также доказывается, что систему из g независимых равенств с p переменными x_1, \dots, x_p всегда можно разрешить относительно каких-то g переменных (называемых «базисными») и выразить их через остальные $k = p - g$ переменных (называемых «свободными»). Свободным переменным можно придавать какие угодно значения, не нарушая условий (8.1). Так вот, для того чтобы перейти от условий-равенств (8.1) к условиям-неравенствам, достаточно разрешить уравнения (8.1) относительно каких-то g базисных переменных, выразить их через свободные, а затем вспомнить, что все переменные должны быть неотрицательными, и записать условия их неотрицательности в виде ограничений-неравенств. А потом «забыть» о базисных переменных и манипулировать только свободными, число которых будет $k = p - g$. При этом надо будет освободить от базисных переменных также и функцию L , подставив в

Моделирование транспортных процессов

нее их выражения через свободные. Таким образом, при переходе от ОЗЛП к задаче с ограничениями-неравенствами число переменных не увеличивается, а уменьшается на число g независимых условий- равенств в ОЗЛП. Примеров такого перехода мы приводить не будем, предоставляя пытливому читателю самому убедиться в его возможности.

Итак, всякая задача линейного программирования может быть сведена к стандартной форме ОЗЛП. Мы не будем подробно останавливаться на способах реше-

') Равенства называются линейно независимыми, если никакое из них нельзя получить из других путем умножения на какие-то коэффициенты и суммирования, т. е. никакое из них не является следствием остальных.

62

ния этой задачи. Им посвящены специальные руководства (например, [4, 5]), они описаны во многих книгах по исследованию операций (например, [6, 7]). В следующем параграфе мы изложим только некоторые соображения общего характера относительно существования решения ОЗЛП и способов его нахождения. Никакими расчетными алгоритмами мы заниматься не будем, а отошлем интересующегося читателя к вышеупомянутым руководствам.

3. **Вопрос 4.** Двойственность задач линейного программирования

В оптимизационных задачах требуется достижение экстремального (минимального или максимального) значения целевой функции при выполнении условий, связанных с балансом производства и потребления, ресурсов и объемов производства, однозначным выбором вариантов из множества возможных; учитываются и другие условия. В настоящее время оптимизационные задачи реализуются в основном методами линейного программирования.

Особенности задач линейного программирования заключаются в следующем: целевая функция и ограничения задачи выражены линейными зависимостями (равенствами или неравенствами);

число зависимостей всегда меньше числа неизвестных (условие неопределенности);

неотрицательность искомых переменных.

22

Общая форма записи задач линейного программирования в сокращенном виде обычно выглядит так:

найти $x_{ij} > 0$ ($j = 1, 2, \dots, n$) при ограничениях типа

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot x_j \leq b_i \quad (i = 1, 2, \dots, m);$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot x_j = b_i;$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot x_j \geq b_i;$$

Моделирование транспортных процессов

которые минимизируют (или максимизируют) линейную форму

$$L = \sum_{j=1}^n C_j \cdot x_j.$$

Стандартной формой общей задачи линейного программирования считается задача нахождения решений системы линейных уравнений в неотрицательных числах, которые минимизируют линейную форму. Стандартная форма задачи

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n = b_1;$$

$$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2n} x_n = b_2;$$

.....

$$a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \dots + a_{mn} x_n = b_m,$$

$$x_j \geq 0 \ (j = 1, 2, \dots, n).$$

При этих условиях

$$C_1 x_1 + C_2 x_2 + \dots + C_n x_n = L \rightarrow \min,$$

здесь c_1, c_2, \dots, c_n - коэффициенты целевой функции при переменных x_{ij} .

В случае максимизации целевой функции L следует знаки при переменных в целевой функции изменить на противоположные, и мы вновь приходим к задаче минимизации, т.е. одна задача сводится к другой заменой L на $-L$, или $\max L = -\min(-L)$.

Например, задано

$$L = x_1 + 2x_2 - x_3 \rightarrow \max.$$

Умножив коэффициенты целевой функции на -1, $L = -x_1 - 2x_2 + x_3 \rightarrow \min$.

Чтобы найти решение исходной задачи максимизации, необходимо полученные значения переменных задачи минимизации умножить на -1.

Любая совокупность $x \geq 0$, удовлетворяющая условиям задачи, называется допустимым решением, а допустимое решение, минимизирующее (максимизирующее) целевую функцию L , называется оптимальным решением.

При решении общей задачи линейного программирования в большинстве случаев ее стараются свести к канонической форме, наиболее простой и удобной для решения. Каноническая форма задачи характеризуется тем, что все ограничения в ней заданы линейными уравнениями, а сама система содержит базис.

Если ограничения задачи линейного программирования заданы системой линейных неравенств вида

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n \leq b_1;$$

$$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2n} x_n \leq b_2;$$

.....

$$a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \dots + a_{mn} x_n \leq b_m$$

при условии $b_i \geq 0$ ($i = 1, 2, \dots, m$), то она приводится к канонической форме путем введения дополнительных переменных $x_{n+1} > 0$ ($i = 1, 2, \dots, m$) в левую часть неравенств:

23

или сокращенно

$$\sum_{j=1}^{n+m} a_{ij} x_j = b_i, i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n, n+1, n+2, \dots, n+m;$$

условие неотрицательности переменных запишем

$$x_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, n, n+1, n+2, \dots, n+m.$$

Данная система уравнений представляет собой каноническую форму задачи, а дополнительные переменные x_{n+i} $i = 1, 2, \dots, t$) составляют базис. В целевую функцию дополнительные переменные входят с нулевыми коэффициентами.

Если система ограничений задачи линейного программирования задана уравнениями (см. стандартную форму), то к канонической форме она приводится путем введения в каждое уравнение так называемых искусственных переменных, которые и составят базис системы.

В случае если ограничения задачи выражены неравенствами вида \geq (больше или равно), т.е.

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq b_i,$$

24

в левую часть неравенств с коэффициентом - 1 вводятся неотрицательные дополнительные переменные $x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{n+m}$ и неравенства преобразуют в эквивалентные уравнения, затем прибегают к методу искусственного базиса.

Последние два случая подробно описаны в п. 3.4 гл. 3.

Каждой задаче линейного программирования соответствует другая, называемая двойственной задачей линейного программирования. Исходная задача по отношению к двойственной называется прямой. Решение двойственной задачи позволяет получить чрезвычайно важные показатели для анализа и экономической интерпретации исходной задачи.

Пусть прямая задача линейного программирования заключается в определении значений $x_j \geq 0$ ($j = 1, 2, \dots, n$), минимизирующих линейную форму

$$L(x) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n,$$

при условиях

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &\geq b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &\geq b_2; \\ \dots &\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &\geq b_m. \end{aligned}$$

Двойственная ей задача состоит в определении значений y_1, y_2, \dots, y_m , максимизирующих линейную форму

$$z(y) = b_1 y_1 + b_2 y_2 + \dots + b_m y_m,$$

при условиях

Моделирование транспортных процессов

$$\begin{aligned} a_{11} y_1 + a_{21} y_2 + \dots + a_{m1} y_m &\leq C_1; \\ a_{12} y_1 + a_{22} y_2 + \dots + a_{m2} y_m &\leq C_2; \\ \vdots &\vdots \\ a_{1n} y_1 + a_{2n} y_2 + \dots + a_{mn} y_m &\leq C_n. \end{aligned}$$

Прямая и двойственная задачи образуют пару задач, называемую в линейном программировании *двойственной парой*. Вышеуказанные две задачи являются двойственными симметричными задачами, в которых условия как исходной, так и двойственной задачи заданы неравенствами, причем переменные как одной, так и другой задачи не могут быть отрицательными.

Несимметричные двойственные пары имеют место, например, когда прямая задача записана в канонической форме (ограничения заданы уравнениями), а также в случае отсутствия требований на неотрицательность двойственных переменных. Если же прямая задача имеет смешанную форму, т.е. часть ограничений является неравенствами, а часть уравнениями, то в двойственной задаче на двойственные

25

переменные, соответствующие ограничениям-уравнениям, требование неотрицательности не будет накладываться, а на двойственные переменные, соответствующие ограничениям-неравенствам, - будут накладываться.

Сравнивая прямую и двойственную задачи линейного программирования, сформулируем основные правила составления математической модели двойственной задачи.

1. Каждому /-му ограничению прямой задачи соответствует переменная двойственной задачи y_j , которая называется двойственной объективной оценкой. Число двойственных оценок равно числу ограничений в исходной задаче.

2. Каждой переменной исходной задачи x_i ($i = 1, 2, \dots, n$) соответствует ограничение двойственной задачи. Значит, в двойственной задаче будет n ограничений.

3. Коэффициенты при переменных, стоящих в строках системы прямой задачи, становятся коэффициентами при переменных в столбцах системы двойственной задачи.

Действительно, матрицы коэффициентов при переменных и в прямой, и в двойственной задаче получаются друг из друга транспонированием, т.е. заменой строк столбцами с сохранением их порядка

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ и } A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

4. Знаки неравенств меняются на противоположные. Если в прямой задаче содержатся неравенства типа \leq то в двойственной - наоборот, типа \geq .

5. Свободные члены неравенств системы ограничений прямой задачи становятся коэффициентами целевой функции двойственной задачи.

6. Правые части ограничений в двойственной задаче равны коэффициентам целевой функции исходной задачи.

7. Требование минимизации целевой функции $L(x)$ прямой задачи заменяется требованием максимизации целевой функции $L(y)$ двойственной задачи.

Соответствие характеристик прямой и двойственной задач приведено в табл. 1.1.

Моделирование транспортных процессов

Основные теоремы двойственности в линейном программировании следующие.

Теорема 1 (существования). Если задача линейного программирования и двойственная ей задача имеют допустимые решения, то обе они имеют оптимальные решения и одинаковые значения целевых функций.

Теорема 2 (двойственности). Если задача линейного программирования имеет оптимальное решение, то и двойственная задача имеет оптимальное решение.

26

Таблица 1.1

Характеристика	Задача	
	прямая	двойственная
Переменная	x_j	y_i
Число переменных	$j = n$	$i = m$
Число ограничений	$i = m$	$j = n$
Целевая функция	$L(x) = \sum_{j=1}^n C_j x_j \rightarrow \min$	$L(y) = \sum_{i=1}^m b_i y_i \rightarrow \max$
Ограничения	$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq b_i$	$\sum_{i=1}^m a_{ji} y_i \leq C_j$
Область допустимых решений	Нет	$L(y)$ неограничена
Наличие целевой функции L	$L(x)$ неограничена	Области допустимых решений нет

Доказательство этих теорем можно найти в соответствующих руководствах по линейному программированию.

Понятие двойственности широко используется в анализе задач линейного программирования и их экономической интерпретации. В результате решения задачи получаем два описания экономического явления: одно математическое, другое, которое являясь двойственным первому, - экономическое. Экономическое описание содержит специальные двойственные оценки каждого вида хозяйственных ресурсов или технологических способов и являются важным инструментом экономического анализа. Оценка показывает, насколько изменится целевая функция, если количество ресурса изменить на единицу. Они позволяют исследовать устойчивость оптимальной величины критерия при возможных изменениях первоначальных условий - ограничений, непосредственно дают информацию о последствиях изменения плана и эти последствия оцениваются без пересчета.

Свойства двойственности более детально рассмотрены в каждом конкретном случае в соответствующих разделах учебника по экономической интерпретации задач линейного программирования.

Контрольные вопросы:

Моделирование транспортных процессов

1. Как называют стандартную форму представления задачу линейного программирования?
2. Формулировка «основной задачи линейного программирования».
3. Что является целью решения в оптимизационных задачах?
4. Особенности задач линейного программирования.
5. Общая форма записи задач линейного программирования в сокращенном виде.
6. Какая задача считается стандартной формой общей задачи линейного программирования?
7. К какой форме в большинстве случаев свести решение общей задачи линейного программирования?
8. Чем характеризуется каноническая форма задачи линейного программирования?
9. Какая задача линейного программирования называется прямой?
10. Охарактеризовать понятие «двойственная пара» в линейном программировании.
11. Основные правила составления математической модели двойственной задачи.

Лекция 5. Геометрическая интерпретация задач оптимизации

Вопросы лекции:

4. Геометрическая интерпретация задач оптимизации
5. Решение задач на максимум и минимум целевой функции

Вопрос 1. Геометрическая интерпретация задач оптимизации

Графоаналитический метод основан на правилах аналитической геометрии и поэтому его часто называют геометрическим методом. Этим методом решают в основном задачи оптимизации с двумя переменными X_1 и X_2 , которые по смыслу экономических задач не должны быть отрицательными, т.е. должно соблюдаться условие $x_1 > 0$ и $x_2 \geq 0$. Уравнения $x_1 = 0$ и $x_2 = 0$ являются осями системы декартовых координат первого квадранта (рис. 2.1), поскольку x_1 и x_2 положительны.

Уравнение $x_1 = 0$ представляет собой множество точек, лежащих на оси координат x_2 . Для всех точек, расположенных справа от оси X_2 , имеем $x_1 > 0$, а для точек слева от оси X_2 - $x_1 < 0$. Таким образом, геометрическое место точек, описываемое неравенством $x_1 \geq 0$, представляет собой полуплоскость, расположенную справа от оси X_2 . Назовем эту полуплоскость областью допустимых значений и обозначим штрихами.

Уравнение $x_2 = 0$ определяет ось x_1 а неравенство $x_2 \geq 0$ - полуплоскость, расположенную выше оси x_1 . Совместно условия $x_1 > 0$, $x_2 \geq 0$ определяют точки первого квадранта.

Для дальнейшего рассмотрения геометрической интерпретации задач оптимизации обратимся к примеру из п. 1.1 гл. 1.

Необходимо минимизировать функцию, т.е.

$$L(x) = 4x_1 + 6x_2 \rightarrow \max$$

при следующих условиях:

$$6x_1 + 2x_2 \leq 300;$$

$$2x_1 + 4x_2 \leq 200;$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

Рассмотрим уравнение $6x_1 + 2x_2 = 300$. Чтобы построить прямую, описываемую этим уравнением, найдем две точки, лежащие на этой прямой. При $x_1 = 0$ из уравнения прямой найдем $2x_2 = 300$, откуда $x_2 = 150$. Следовательно, точка А с координатами (0,150) лежит на искомой прямой. При $x_2 = 0$ имеем $6x_1 = 300$, откуда $x_1 = 50$, а точка D с координатами (50, 0) также находится на искомой прямой. Через эти две точки проводим прямую AD (рис. 2.2).

Линейное неравенство $6x_1 + 2x_2 \leq 300$ представляет собой полуплоскость, расположенную с одной из сторон от построенной прямой $6x_1 + 2x_2 = 300$. Чтобы выяснить, с какой стороны от этой прямой расположены точки искомой полуплоскости, подставим в неравенство $6x_1 + 2x_2 \leq 300$ координаты какой-либо точки, не лежащей на граничной прямой. Например, начало координат $O = (0,0)$. Для него справедливо неравенство $6 \cdot 0 + 2 \cdot 0 = 0 < 300$. Это значит, что начало координат лежит в области допустимых значений, которая находится слева от прямой AD и на рис. 2.2 заштрихована.

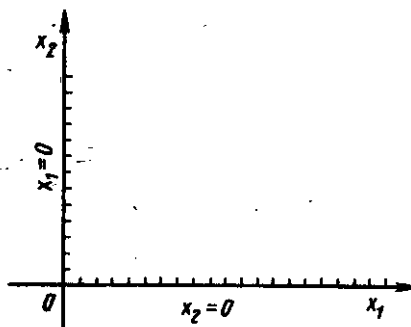


Рис. 2.1. Графическое изображение уравнений $x_1=0$ и $x_2=0$

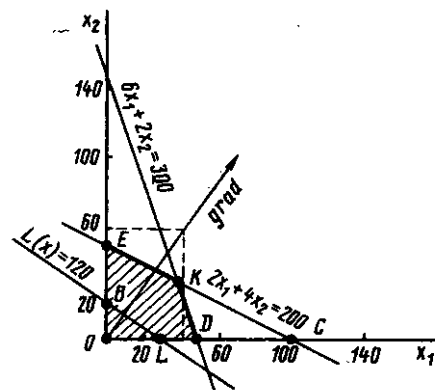


Рис. 2.2. Графический метод решения задачи на максимум

Уравнение $2x_1 + 4x_2 = 200$ построим по двум точкам. При $x_1 = 0$ $4x_2 = 200$, откуда $x_2 = 50$. Тогда точка E имеет координаты (0,50) и принадлежит искомой прямой. При $x_2 = 0$, $2x_1 = 200$, точка C находится на данной прямой с координатами (100, 0). Подставив в неравенство координаты точки C (0, 0), получим $2 \cdot 0 + 4 \cdot 0 = 0 < 200$. Значит, начало координат находится в области допустимых значений от прямой $2x_1 + 4x_2 = 200$.

Система ограничений задачи требует, чтобы планы $(x_1; x_2)$ удовлетворяли всем четырем неравенствам, т.е. допустимые планы - точки $(x_1; x_2)$ должны одновременно находиться во всех четырех полуплоскостях. Этому требованию отвечают только точки, расположенные внутри и на границе многоугольника OEKD, который и является многоугольником допустимых решений.

Вершинами многоугольника допустимых решений являются точки O, E, K, D, отрезки прямых OE, EK, KD, OD - его ребра. Любая точка многоугольника OEKD

Моделирование транспортных процессов

является планом задачи, удовлетворяя все ее условия. Вершины многоугольника образованы пересечением двух прямых и соответствуют опорным планам задачи, среди которых находится и наилучший (оптимальный) план. Таким образом, опорных планов будет столько, сколько вершин у многоугольника допустимых решений.

29

Наглядное геометрическое представление можно получить и для целевой функции $L(x) = 4x_1 + 6x_2$. Зафиксируем какое-либо значение целевой функции, например $L(x) = 120$. Уравнение $4x_1 + 6x_2 = 120$ определяет прямую, проходящую через точку В с координатами $(x_1=0; x_2=20)$ и точку L с координатами $(x_1=30; x_2=0)$. Отрезок BL лежит внутри многоугольника OEKD. Следовательно, для всех планов (точек) этого отрезка значение целевой функции одинаково и равно 120. Придавая другие значения целевой функции, получим параллельные прямые, которые называют линиями уровня целевой функции.

Перемещая прямую $L(x)$ параллельно самой себе в одном направлении, получим возрастание целевой функции, а в противоположном направлении - ее убывание. В рассматриваемом примере передвижение прямой BL вправо определяет возрастание целевой функции, которую мы максимизируем. Так поступают до тех пор, пока прямая BL будет иметь хотя бы одну общую точку с многоугольником допустимых решений OEKD. Из рис. 2.2 следует, что последней точкой, которую пересечет прямая уровня целевой функции, будет точка К. Это значит, что точка К определяет оптимальный план задачи.

Направление возрастания, перпендикулярное линии уровня, называется направлением наибольшего возрастания целевой функции и определяет ее максимальный прирост. Это направление можно установить без построения линий уровня. Для этого необходимо на осях x_1 и x_2 отложить отрезки, равные коэффициентам целевой функции, и по ним, как по координатам, построить вектор наибольшего возрастания целевой функции. В математике его называют градиентом и обозначают знаком grad . Градиентом для функции $L(x) = 4x_1 + 6x_2$ будет вектор $\text{grad} L = (4; 6)$. Для удобства его построения увеличим координаты, например, в 10 раз, т.е. $\text{grad} L = (40; 60)$. Построим градиент целевой функции $L(x)$, для чего соединим точку с координатами $(40; 60)$ с началом координат. Линии уровня целевой функции строят перпендикулярно направлению градиента.

Итак, тем или другим способом, установлено, что точка К определяет оптимальный план задачи, значения переменных которого соответствуют координатам данной точки. Для установления координат необходимо решить систему уравнений прямых, образующих эту вершину:

$$6x_1 + 2x_2 = 300;$$

$$2x_1 + 4x_2 = 200.$$

Уравняем коэффициенты при x_2 , умножив второе уравнение на 3, и вычтем из второго уравнения первое. Получим $10x_2 = 300$, $x_2 = 30$. Подставив значение $x_2 = 30$ в любое из уравнений, например в первое, определим значение x_1 :

$$6x_1 + 2x_2 \cdot 30 = 300,$$

30

откуда

$$6x_1 = 300 - 60 = 240,$$

Моделирование транспортных процессов

следовательно, $x_1 = 40$.

Таким образом, чтобы получить наибольшую прибыль, предприятию необходимо выпускать 40 изделий первого вида и 30 изделий второго вида. Максимальная прибыль при этом составит:

$$L(x) = 4x_1 + 6x_2 = 4 \cdot 40 + 6 \cdot 30 = 340 \text{ р.}$$

На основе рассмотренного примера и геометрической интерпретации задачи оптимизации с двумя переменными можно сделать следующие выводы:

- 1) в двумерном пространстве область допустимых решений представляет собой многоугольник;
- 2) каждой стороне многоугольника соответствует значение одной переменной, равной нулю;
- 3) каждой вершине многоугольника допустимых решений соответствуют значения двух переменных, равные нулю;
- 4) каждому значению целевой функции соответствует прямая;
- 5) оптимальному решению задачи соответствует вершина многоугольника, в которой целевая функция приобретает оптимальное значение, при этом оптимальными переменными являются координаты этой вершины.

В общем случае задачи оптимизации имеют аналогичную геометрическую интерпретацию. Множество планов задачи будет представлять собой многогранник, вершины которого соответствуют опорным планам. При решении задачи осуществляется переход от одной вершины многогранника к другой с большим значением целевой функции до получения оптимального ее значения. Отметим, что эффективность методов оптимизации как раз и заключается в том, что перебор вершин (итерация) ведется только в направлении наибольшего возрастания целевой функции. Поэтому рассматриваются не все вершины, которых огромное количество, а только те, которые ближе к экстремальной.

* При определении класса задач оптимизации и выборе метода ее решения необходимо знать, выпукло или невыпукло множество допустимых решений, линейная или нелинейная целевая функция.

По определению множество называется выпуклым, если для любых двух его точек весь отрезок, соединяющий эти точки, принадлежит этому множеству. Примерами выпуклых множеств могут служить, например, отрезок (рис. 2.3, а), плоскость в виде круга (рис. 2.3, б), куб, параллелепипед, а также многоугольники (рис. 2.3, в, г), которые целиком расположены по одну сторону от каждой из его сторон, и др.

31

На рис. 2.4 изображены невыпуклые множества. В невыпуклых множествах можно указать хотя бы две точки отрезка АВ, не принадлежащие рассматриваемому множеству.

Для решения задач оптимизации важно знать, кроме выпуклости множества допустимых решений, является ли целевая функция выпуклой или вогнутой или она не относится ни к тому, ни к другому классу.

Функцию $y = f(x)$ одной переменной называют выпуклой, или выпуклой вниз, если отрезок, соединяющий две произвольные точки ее графика, целиком лежит выше графика $y = f(x)$ (например, отрезок АВ на рис. 2.5).

Функция $y = f(x)$ называется вогнутой или выпуклой вверх, если отрезок, соединяющий две произвольные точки на графике этой функции, целиком лежит ниже графика $y = f(x)$ (например, отрезок CD на рис. 2.6). Аналогичными свойствами обладают выпуклые и вогнутые функции многих переменных.

Моделирование транспортных процессов

Если множество допустимых решений является выпуклым, а максимизируемая целевая функция выпукла вверх (или минимизируемая выпукла вниз), то задача относится к классу выпуклого программирования. Важным свойством таких задач является движение из области неоптимального плана, с непрерывным улучшением значения целевой функции, до тех пор, пока не будет получен оптимальный план.

Рассмотрим задачи максимизации функции $y = f(x)$ на отрезке $[a, b]$ для трех случаев. В случае максимизации выпуклой вверх функции $y = f(x)$ (рис. 2.7) при любой начальной точке отрезка $[a, b]$, сдвигаясь в сторону увеличения функции $f(x)$, мы всегда достигнем точки c , в которой $f(x)$ принимает максимальное значение. Заметим, что производная функции $f(x)$ в точке c равна нулю.

В случае максимизации выпуклой вниз функции $y = f(x)$ (рис. 2.8) сдвиг в сторону увеличения функции будет приводить к разным результатам в зависимости от положения начальной точки. Если начальная точка находится на отрезке $[a, c]$, где c - точка минимума (в этой точке производная $f'(x)$ равна нулю), то сдвиг в сторону увеличения $f(x)$ приведет в точку a . Но a является максимальной на отрезке $[a, b]$, так как $f(b) > f(a)$, хотя a и является максимальной для x , близких к a . (для некоторой окрестности точки a). Такие точки называются точками локального максимума. Для функции, выпуклой вниз, точками локального максимума могут быть все крайние точки множества допустимых решений. Например, если множество допустимых решений задачи многогранник, то все его вершины могут быть точками локального максимума.

Если функция произвольная (ни выпуклая, ни вогнутая), то точек локального максимума (минимума) может быть еще больше, так как, кроме крайних точек, могут появиться и внутренние точки локального максимума (минимума). Например, на рис. 2.9 изображен

32

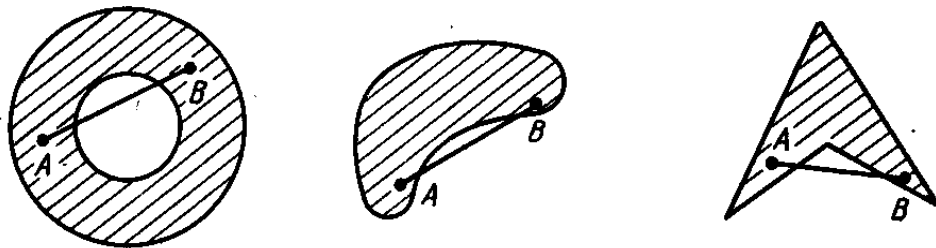


Рис. 2.3. Выпуклые множества

33

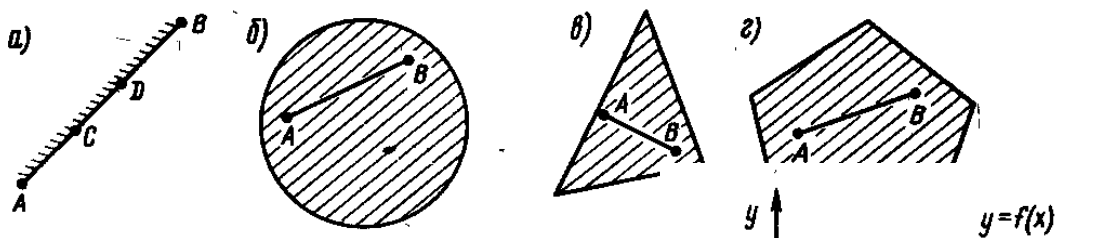
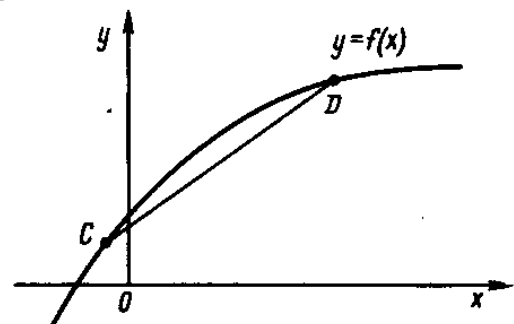


Рис. 2.4. Невыпуклые множества



46

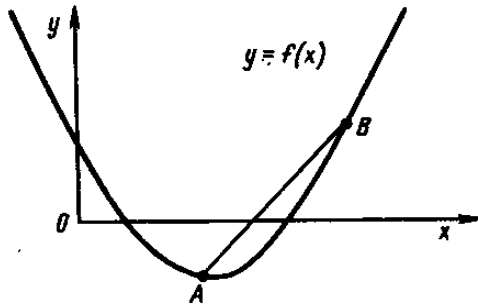


Рис. 2.5. График выпуклой вниз функции

Рис. 2.6. график выпуклой вверх функции

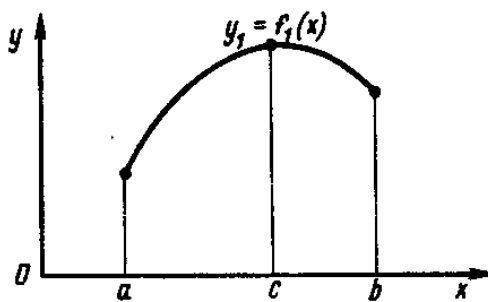


Рис. 2.7. График выпуклой вверх функции ее абсолютное максимальное значение

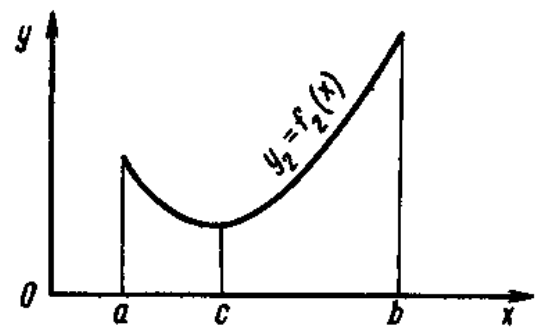


Рис. 2.8. График выпуклой вниз функции ее абсолютное минимальное значение

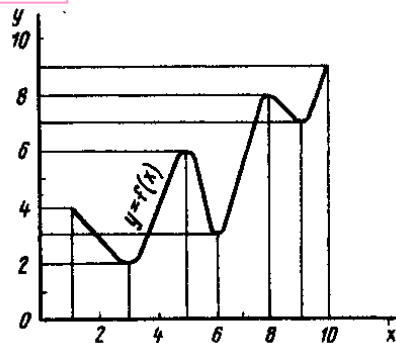


Рис. 2.9. График функции и ее ряд локальных экстремальных значений: минимумов и максимумов

график некоторой произвольной функции $y = f(x)$, определенной на отрезке $[1; 10]$.

Функция имеет на отрезке $[1; 10]$ три точки локального минимума ($x_1 = 3, x_2 = 6, x_3 = 9$) и две точки локального максимума ($x_4 = 4, x_5 = 5$). Задачи с многими точками локального максимума или минимума называют многоэкстремальными. Их решение связано с перебором точек локального максимума или минимума и такими понятиями, как абсолютный максимум или абсолютный минимум функции. Вместо термина „абсолютный“ часто используют „глобальный“. Глобальный максимум функции — есть ее наибольшее значение в области определения, а глобальный минимум — наименьшее значение. Глобальный максимум и глобальный

Моделирование транспортных процессов

минимум называют глобальными экстремумами функции. На рис. 2.9 представлен график функции, глобальный минимум которой равен 2 и совпадает с наименьшим из локальных минимумов. Глобальный же максимум, равный 9, функция достигает в точке $x = 10$ и он не совпадает с наибольшим из локальных максимумов. Отсутствие свойства выпуклости множества допустимых решений также вызывает многоэкстремальность и усложняет решение задачи.

В задачах линейного программирования область допустимых решений является выпуклым множеством, а целевая функция (линейная) является одновременно выпуклой вверх и выпуклой вниз. Поэтому одинаково эффективно решается задача линейного программирования как на максимум целевой функции, так и на минимум. Как было показано выше; задачи с нелинейной целевой функцией этим свойством не обладают.

Если задача отыскания максимума выпуклой вверх функции на выпуклом множестве решается хорошо, то задача отыскания минимума этой же функции на том же множестве является многоэкстремальной и решается плохо. И наоборот, если задача отыскания минимума выпуклой вниз функции решается хорошо, то задача отыскания максимума этой функции решается плохо.

34

Вопрос 2. Решение задач на максимум и минимум целевой функции

Графоаналитический метод - один из простейших методов линейного программирования. Он наглядно раскрывает сущность линейного программирования, его геометрическую интерпретацию. Однако этот метод имеет существенный недостаток: с его помощью можно решать только те планово-экономические задачи, математическая модель которых представляет собой систему с двумя или тремя неизвестными. По этой причине в организации и планировании перевозок автомобильным транспортом этот метод может быть применен для решения очень узкого круга задач. Покажем особенности графоаналитического метода на примере решения некоторых задач.

Допустим, завод для производства двух видов продукции должен последовательно использовать четыре разные группы оборудования, имеющегося в следующих количествах: группы А - 24; группы В - 16; группы С - 32 и группы D - 24 ед.

При существующей на заводе технологии на производство единицы продукции первого вида требуется 2 ед. оборудования группы А, 1 ед. группы В и 4 ед. группы С. Оборудование группы D в производстве продукции первого вида не участвует[^] или, иначе говоря, в производстве продукции первого вида из оборудования группы D участвует 0 ед., т.е. техническими коэффициентами продукции первого вида по отдельным группам оборудования будут соответственно 2,1,4,0. Техническими коэффициентами при производстве продукции второго вида будут 2,2,0 и 4.

Известно, что единица продукции первого вида дает заводу прибыль 4 р., а второго вида - 6 р. Сколько единиц продукции каждого вида должен производить завод, чтобы получить наибольшую прибыль?

На первый взгляд кажется, что заводу лучше производить только продукцию второго вида, так как она дает больше всего прибыли. Но это неверно, поскольку объем ее производства при существующей технологии ограничен наличным оборудованием. И если производить только второй вид продукции, то часть имеющегося оборудования может быть не использована, что дает заводу определенную потерю в прибыли. Следовательно, нужно найти такой план по

Моделирование транспортных процессов

номенклатуре производства продукции, при котором бы максимально использовалось имеющееся оборудование и достигалась наибольшая прибыль.

Запишем исходные данные задачи в бооме табл. 2.1.

Неизвестными в данной задаче будут количества единиц продукции каждого вида, которые должен производить завод, чтобы получить максимальную прибыль. Следовательно, критерием оптимальности решения является прибыль, и оптимальное решение будет получено при таких значениях неизвестных, при которых критерий оптимальности получит свое максимальное значение.

Обозначим через x_1 x_2 количество единиц продукции соответственно первого и второго видов, которое будет производить завод.

35
Таблица 2.1

Группа оборудования	Технические коэффициент		Количество оборудования, ед.
	Первый вид продукции	Второй вид продукции	
A	2	2	24
B	1	2	16
C	4	0	32
D	0	4	24
Прибыль на единицу продукции,	4	6	X

Тогда экономико-математическая модель задачи будет иметь вид неопределенной системы неравенств с двумя неизвестными:

$$2x_1 + 2x_2 \leq 24;$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 16;$$

$$4x_1 \leq 32;$$

$$4x_2 \leq 24.$$

Первое неравенство системы показывает возможный объем производства продукции первого и второго видов, который ограничивается имеющимся количеством единиц оборудования группы A. Только те значения x_1 и x_2 можно принять за возможное решение, когда левая часть уравнения будет меньше или равна 24. Больше 24 она не может быть: не хватит оборудования группы A. Наилучшим решением, конечно, будет тот вариант, когда $2x_1 + 2x_2 = 24$. Но величины x_1 и x_2 ограничиваются не только использованием оборудования группы A, но и других групп (B, C, D), которые ограничиваются соответственно вторым, третьим и четвертым неравенствами системы.

Неизвестные x_1 и x_2 могут при решении системы принимать значения, равные нулю, и положительные. Если неизвестные равны нулю, то никакого производства нет, если выше нуля, то имеется производство продукции. Отрицательными величинами x_1 и x_2 не могут быть, так как при производстве любой продукции отрицательная ее величина не имеет реального смысла.

Таким образом, в нашей системе

$$x_1 \geq 0;$$

$$x_2 \geq 0.$$

Моделирование транспортных процессов

Чтобы полностью изобразить модель задачи, необходимо в математическом виде записать цель, к которой мы стремимся. Наша цель -

36

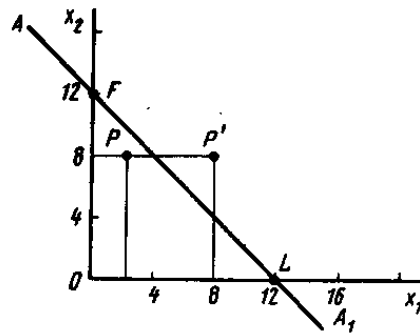


Рис. 2.10. Графическое изображение условий задачи

это получение максимальной прибыли. В этом случае целевая функция будет иметь вид:

$$(4 \cdot 1 + 6 \cdot 2) \cdot \max.$$

Это законченный вид модели.

Далее для решения задачи необходима прямоугольная координатная сетка, на которой следует изобразить полученную математическую модель задачи.

Отложим по оси абсцисс значения x_1 , а по оси ординат - x_2 . Проведем в этой системе координат прямую AA_1 , координаты точек которой характеризуют максимальное использование оборудования группы А (рис. 2.10), т.е. прямую, изображающую уравнение

$$2 \cdot x_1 + x_2 = 24.$$

При пересечении осей координат прямая AA_1 образует отрезок FL , представляющий собой вектор условий или ограничений. Координаты точек, образующих вектор, показывают программу производства завода, при которой будет полностью использовано оборудование группы А.

Вектор условий вместе с осями координат образует треугольник OFL , в пределах которого расположены точки, координаты которых позволяют определить возможную программу производства завода, когда оборудование группы А будет использовано не полностью, например точка $P(x_1 = 2; x_2 = 8)$. Подставив значение x_1 в уравнение, получим $2 \cdot 2 + 8 = 20$.

Всего же оборудования группы А - 24. Таким образом, вектор FL и координатные оси ограничили треугольное пространство OFL , координаты любой точки которого могут дать решение в пределах возможности использования оборудования группы А. Это так называемое в математике выпуклое множество, в данном случае дающее возможное решение. В рассматриваемой задаче это частный случай выпуклого множества, представленного плоскостью, или область возможного решения: за пределами вектора FL ни одна точка не может иметь свои координаты объем производства изделий первого и второго видов. Если задать объем производства изделий первого и

37

Моделирование транспортных процессов

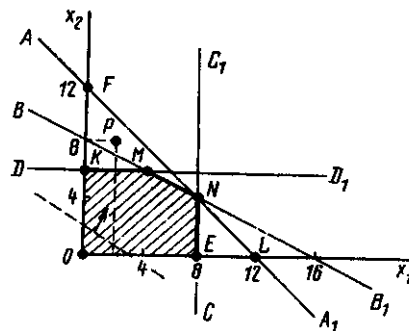


Рис. 2.11. Графический метод решения задачи составления оптимального плана по номенклатуре производства продукции

второго видов координатами точек, лежащих за пределами треугольника OFL, то это производство будет или нереальным (отрицательны объемы выпуска), или не будет обеспечено необходимым оборудованием. Например, при программе, определенной координатами точки P^* ($x_1 = 8$; $x_2 = 8$), должно быть занято оборудование группы A: $2 \cdot 8 + 2 \cdot 8 = 32 > 24$.

При таком объеме и номенклатуре производства оборудования группы A не хватит. В данном случае точка P' лежит в области невозможных решений.

Лучше всего было бы определить объем производства координатами точек, лежащих на векторе ограничений, которые дали бы полное использование оборудования группы A. Но это желание ограничивают имеющиеся в системе неравенства, определяющие возможности использования оборудования групп B, C и D.

Отложим на графике остальные прямые, соответствующие максимальному использованию оборудования групп B, C, D (рис. 2.11).

Эти прямые образовали с ранее проведенной прямой (вернее ее отрезком FL) некоторый многоугольник OKMNE, представляющий собой геометрическое место точек, координаты которых определяют возможный при данных условиях производства вариант плана выпуска продукции по номенклатуре. Любая точка, лежащая за пределами многоугольника OKMNE, своими координатами покажет невозможность выполнения такого плана, так как он не будет обеспечен необходимым производственным оборудованием (станками, установками, машинами, агрегатами и т.п.). Например, если зададим объем производства координатами той же точки P ($x_1 = 2$; $x_2 = 8$), то завод не сможет обеспечить выполнение задания из-за отсутствия необходимого количества оборудования групп B и D:

$$2 \cdot 2 + 2 \cdot 8 = 20 > 16;$$

$$0 \cdot 2 + 4 \cdot 8 = 32 > 24.$$

Оптимальное решение достигается при максимальном использовании производственного оборудования. Оно определяется координатами

38

точек, лежащих на границах многоугольника OKMNE, и, в первую очередь, координатами точек, являющихся вершинами многоугольника, так как координаты вершин многоугольника определяют области возможного решения производственной программы, при которой одна, две группы оборудования или более будут использованы полностью. Следовательно, зная координаты каждой вершины, можно определить производственную программу по выпуску продукции первого и второго видов, а затем с помощью целевой функции найти величину прибыли, соответствующую программе, определяемой координатами данной

Моделирование транспортных процессов

вершины многоугольника. При сравнении значений прибыли по всем программам, определяемым вершинами многоугольника, выявляется оптимальное решение.

В нашем примере вершина К имеет координаты 0 и 6, т.е. эта точка определяет ту программу, при которой будет выпускаться только 6 ед. продукции второго вида. Продукций же первого вида не будет производиться. При такой производственной программе завод получит прибыль в 36 р. ($4 \cdot 0 + 6 \cdot 6 = 36$ р.).

Если программа будет принята в соответствии с координатами точки М (4; 6), то прибыль составит 52 р. ($4 \cdot 4 + 6 \cdot 6 = 52$ р.); точки N (8; 4) - 56 р.; точки В (8; 0) - 32 р. Таким образом, оптимальное решение определяется координатами точки N. Программа, заданная координатами этой точки (8 ед. продукции первого вида, 4 ед. - второго вида), позволит получить заводу максимальную прибыль - 56 р.

По этой программе оборудование групп А, В и С будет использоваться полностью, а группы D - 16 ед. Остальное оборудование этой группы может быть загружено производством другой продукции.

Найти точку области допустимых решений, координаты которой соответствуют оптимальному решению, можно и графическим путем. Для этого целевая функция приравнивается к какому-либо числу (в нашем примере - 12) и на графике откладывают соответствующую ей прямую, изображенную на рис. 2.11 пунктирной линией. Программа, заданная координатами любой точки отрезка данной прямой, лежащего в пределах области возможных решений, позволит получить прибыль, равную 12 р. Возможность получения большей прибыли имеется, так как полученная прямая лежит не на границе области возможных решений, наиболее удаленной от начала координат. Строя линии, параллельные первоначальной прямой (эти линии называются линиями уровня доходности) и удаляющиеся от начала координат, т.е. увеличивая значения целевой функции, можно найти такую параллельную* которая будет касаться только одной вершины выпуклого множества возможных решений. Координаты этой вершины и покажут оптимальное решение.

Рассмотрим следующий пример. Для этого в условии предыдущего примера поменяем величину прибыли, которую дает единица продукции второго вида, с 6 на 8 р. Тогда целевая функция примет вид:

$$(4x_1 + 8x_2) \rightarrow \max. \quad 39$$

Поделив коэффициенты при неизвестных на 4, получим

$$(x_1 + 2x_2) \rightarrow \max.$$

Левая часть этой функции соответствует уравнению, определяемому использованием оборудования группы В. Следовательно, линия уровня доходности совпадает на графике с линией ВВ₁, и, таким образом, две соседние вершины М и N многоугольника, лежащие на прямой ВВ₁, показывают одинаковые оптимальные решения. Но не только вершины М и N дадут оптимальные решения, а и все точки отрезка MN покажут те же самые решения. В этом случае имеется бесчисленное множество альтернативных оптимальных решений, т.е. по точкам отрезка MN можно будет задавать заводу программы, различные по количеству выпускаемых деталей первого и второго видов, при этом получая одну и ту же прибыль, в данном случае равную 64 р. Определить единственное оптимальное решение при заданных условиях невозможно без какого-либо дополнительного ограничения.

В третьем примере необходимо приготовить смесь, в которой вещества А содержалось бы не менее 12 ед., вещества В - не менее 24 ед., С - не менее 16 ед. Смесь можно приготовить из двух компонентов. Пена первого компонента 8 р. за 1 кг, цена второго - 7 р. В 1 кг первого компонента содержится вещества А 2 ед.,

Моделирование транспортных процессов

столько же вещества В и 1 ед. вещества С. В 1 кг второго компонента вещества А - 1 ед., В и С - по 4 ед.

Как приготовить смесь, чтобы ее цена была минимальной?

Запишем условие задачи в табл. 2.2.

Примем: x_1 - количество килограммов первого компонента в смеси;

x_2 - количество килограммов второго компонента в смеси. Тогда экономико-математическая модель задачи будет иметь следующий вид:

ограничения

$$2x_1 + x_2 \geq 12;$$

$$2x_1 + 4x_2 \geq 24;$$

$$x_1 + 4x_2 \geq 16;$$

$$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0;$$

целевая функция

$$(8x_1 + 7x_2) \rightarrow \min.$$

Как и в первых двух примерах, система будет неопределенной с базисом, равным двум. Но в отличие от предыдущих, эта задача решается не на максимум, а на минимум.

40

Как и в первых двух примерах, система будет неопределенной с базисом, равным двум. Но в отличие от предыдущих, эта задача решается не на максимум, а на минимум.

Таблица 2.2

Вещество	Количество единиц вещества в 1 кг компонентов		Нижний предел количества содержания единиц вещества в смеси
	первого	второго	
А	2	1	12
В	2	4	24
С	1	4	26
Цена 1 кг компонента, р.	8	7	X

Графическое решение задачи приведено на рис. 2.12. Область возможных решений отсекается от начала координат ломаной линией MKFN.

Линия LE является опорным планом, т.е. первоначальной линией уровня доходности, соответствующей произвольно (в нашем примере 140 р.) взятому значению целевой функции. Перемещая линию уровня доходности параллельно самой себе в направлении начала координат, т.е. уменьшая значение целевой функции, будем получать возможные решения с меньшими затратами. Последняя точка возможных решений, которой будет касаться линия уровня доходности, покажет оптимальное решение. В данном примере это точка К с координатами (4; 4). Следовательно, для приготовления смеси необходимо по 4 кг

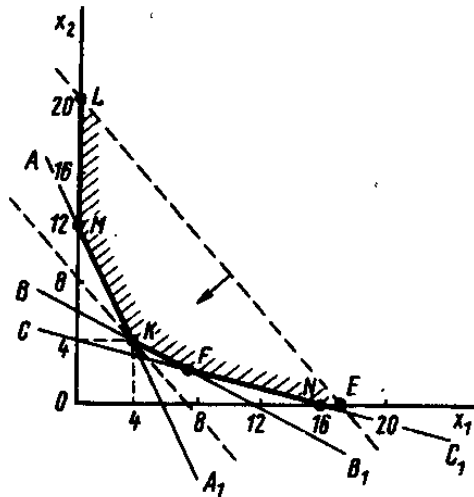


Рис. 2.12, Графический метод решения задачи составления смеси

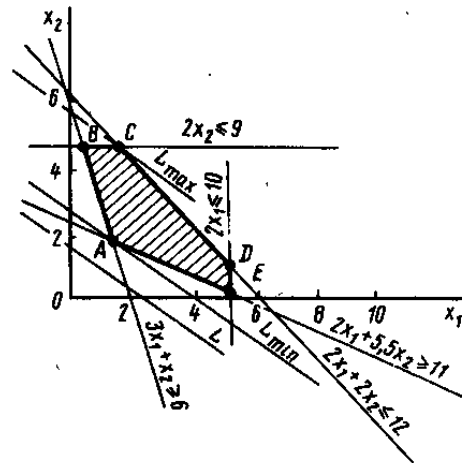


Рис. 2.13. Графический метод решения задачи на минимум и максимум

41

первого и второго компонентов. При этом затраты будут минимальными - 60 р. ($8 \cdot 4 + 7 \cdot 4 = 60$ р.).

Графоаналитическим методом можно определить максимальное и минимальное значения целевой функции одновременно. Пусть требуется найти минимальное и максимальное значения функции

$$L = 4x_1 + 6x_2$$

при условиях

$$2x_1 + 2x_2 \leq 12;$$

$$3x_1 + x_2 \geq 6;$$

$$2x_1 + 5,5x_2 \geq 11;$$

$$2x_1 \leq 10;$$

$$2x_2 \leq 9.$$

Переменные x_1 и x_2 положительны, поэтому множество точек (x_1, x_2) , являющееся допустимым решением, находится в первом октанте (рис. 2.13).

Ограничения образуют выпуклый многоугольник решений ABCDE. Линейная форма $L = 4x_1 + 6x_2$ представляет собой семейство параллельных прямых. Одна из них пройдет через вершину A, что и дает минимальное значение функции L. В вершине C целевая функция достигает своего максимального значения.

Координаты точки A ($x_1 = 1,5; x_2 = 1,5$), точки C ($x_1 = 1,5; x_2 = 4,5$). Следовательно, минимальное значение целевой функции

$$L_{\min} = 4 \cdot 1,5 + 6 \cdot 1,5 = 15,$$

$$\text{максимальное значение } L_{\max} = 4 \cdot 1,5 + 6 \cdot 4,5 = 33.$$

Рассмотренные примеры графоаналитического метода решения задач линейного программирования отражают сущность этого вида математического программирования.

Контрольные вопросы

1. На чем основан графоаналитический метод решения задач линейного программирования?
2. Почему графоаналитический метод называют геометрическим?
3. Какие задачи решают графоаналитическим методом?
4. В чем состоит эффективность методов оптимизации?
5. Определение выпуклого множества.
6. Определение невыпуклого множества.
7. Отличие невыпуклого множества.
8. Достоинства и недостатки линейного программирования.

Лекция 6 . Симплексный метод с искусственным базисом

Вопросы лекции:

6. Экономическое содержание симплексного метода
7. Симплексный метод с искусственным базисом

Вопрос 1. Экономическое содержание симплексного метода

Симплексным методом решают задачи максимизации и минимизации целевой функции. Методика решения их различна. Однако их можно решать и по единому алгоритму симплексного метода, если предварительно выполнить преобразования целевой функции. Так, чтобы задачу на максимум решить по алгоритму симплексного метода для задач на минимум, необходимо изменить знаки при переменных в максимизируемой целевой функции на противоположные, тогда

$$\max L(x) = - \min -L(x).$$

Мы же рассмотрим решение задачи линейного программирования на максимум без преобразования целевой функции и изложим экономическое содержание симплексного метода на конкретном примере.

Рассмотрим условный пример. На предприятие по производству запасных частей для автомобилей поступило три сорта материалов: первого - 1200, второго - 300, третьего - 800 кг. Эти материалы могут быть использованы для выпуска запасных частей трех видов.

На производство запасной части первого вида требуется 5 кг материала первого сорта и 4 кг второго сорта. Материал третьего сорта при производстве запасных частей первого вида не используется. На производство одной запасной части второго вида необходимо израсходовать материала первого сорта - 5 кг, второй сорт не используют и

62

третьего сорта - 2 кг. На единицу запасных частей третьего вида расходуют материала первого сорта 2, второго - 3, третьего - 4,8 кг.

От реализации одной запасной части первого вида предприятие получит 5 р. прибыли, второго вида - 8 и третьего вида - \$ р.

Моделирование транспортных процессов

Какое количество запасных частей каждого вида следует производить из имеющихся материалов, чтобы обеспечить предприятию получение наибольшей прибыли?

Составим экономико-математическую модель задачи.

Обозначим объем производства запасных частей первого вида через второго - третьего - Переменные x_1, x_2, x_3 не могут быть отрицательными, так как это противоречило бы их экономическому смыслу, поскольку объем производства не бывает отрицательным.

Потребность в материале первого сорта составит

$$5x_1 + 5x_2 + 2x_3.$$

Этот расход материалов не должен превышать их наличия, т.е. 1200 кг. Рассуждая аналогично, можно записать ограничение по расходу материалов второго и третьего сортов соответственно:

$$4x_1 + 3x_3 \leq 300;$$

$$2x_2 + 4,8x_3 \leq 800.$$

Прибыль, полученная от реализации запасных частей,

$$L(x) = 5x_1 + 8x_2 + 6x_3.$$

Таким образом, задача сводится к определению значений x_1, x_2, x_3 при условии, что

$$5x_1 + 5x_2 + 2x_3 \leq 1200;$$

$$4x_1 + 3x_3 \leq 300;$$

$$2x_2 + 4,8x_3 \leq 800;$$

$$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0; x_3 \geq 0,$$

которые максимизируют линейную функцию

$$L(x) = 5x_1 + 8x_2 + 6x_3.$$

Чтобы приступить к решению данной задачи симплексным методом, необходимо определить первое допустимое базисное решение. Для этого неравенства преобразуют в равенства путем прибавления в левую часть неравенств дополнительных переменных x_4, x_5 и x_6

63

коэффициентом, равным единице, и нулевыми коэффициентами в целевой функции:

$$5x_1 + 5x_2 + 2x_3 + x_4 = 1200;$$

$$4x_1 + 3x_3 + x_5 = 300;$$

$$2x_2 + 4,8x_3 + x_6 = 800;$$

$$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0; x_3 \geq 0; x_4 \geq 0; x_5 \geq 0; x_6 \geq 0;$$

$$L(x) = 5x_1 + 8x_2 + 6x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 \rightarrow \max.$$

Дополнительные переменные рассматриваются как показатели недоиспользования имеющихся материалов: первого сорта - x_4 , второго - x_5 , третьего - x_6

Моделирование транспортных процессов

Дополнительные переменные x_4, x_5, x_6 не способствуют увеличению прибыли, так как недоиспользованное сырье не участвует в производстве. Поэтому в линейной форме $L(x)$ эти переменные записывают с коэффициентом прибыли, равным нулю.

При решении задачи относительно дополнительных переменных возможны три случая.

Случай 1 - дополнительная переменная равна нулю ($x_{п+,-}; g = T, ш$). Это значит, что при производстве используются все материалы (остатков нет).

Случай 2 - дополнительная переменная больше нуля, т.е. материалы используются неполностью, имеется остаток, который равен разности между запасами материалов и количеством израсходованных материалов. Например, по материалам первого сорта это условие выражается:

$$x_4 = 1200 - (5x_1 + 5x_2 + 2x_3).$$

Случай 3 - дополнительная переменная равна запасам материалов, сырье используется неполностью, а основные переменные задачи $x_2 > x_3$ принимают нулевые значения. Например, по материалам первого сорта это значит, что

$$x_4 = 1200; x_1 = 0; x_2 = 0; x_3 = 0.$$

В задаче оказалось три уравнения и шесть переменных. Такая задача имеет множество решений, среди которых нас интересует единственное - то, которое обеспечивает получение максимальной прибыли (оптимальное решение).

Решение задачи начинают с определения первого базисного допустимого плана. За базисные переменные принимаются дополнительные

64

I

переменные x_4, x_5, x_6 , так как каждая из них входит лишь в одно уравнение с коэффициентами, равными единице, которые образуют единичную матрицу.

Чтобы получить первое допустимое базисное решение, уравнения решают относительно базисных переменных:

$$x_4 = 1200 - (5x_1 + 5x_2 + 2x_3);$$

$$x_5 = 300 - (4x_1 + 3x_3);$$

$$x_6 = 800 - (2x_2 + 4,8x_3).$$

Затем подставляют их значения в линейную форму $L(x)$. Но в связи с тем, что дополнительные переменные входят в линейную форму с нулевыми коэффициентами, для базиса из дополнительных переменных она всегда равна нулю.

В нашем примере первым базисным решением является план: $x_1 = 0; x_2 = 0; x_3 = 0; x_4 = 1200; x_5 = 300; x_6 = 800$, который является допустимым, поскольку значения переменных удовлетворяют системе уравнений, отражающей условия задачи, и они неотрицательны.

С экономической точки зрения полученное первое базисное решение означает, что производство еще не начато и запасы материалов находятся на складе. Предприятие никакой продукции не выпускает ($x_1 = 0; x_2 = 0; x_3 = 0$) и, естественно, прибыли не имеет. Действительно, если подставить значения переменных в линейную форму, она окажется равной нулю.

Моделирование транспортных процессов

Далее, первое допустимое базисное решение улучшают путем введения в него основных переменных задачи. Значение целевой функции при этом увеличивается и в конечном итоге достигает максимума. Это соответствует тому, что производство начато, а прибыль предприятия увеличивается за счет включения в производство того или иного вида продукции. На каждом этапе анализируется включение в производство только одного вида продукции, что соответствует переходу к новому базису. Переход от одного базиса к другому осуществляется с помощью симплексных таблиц по алгоритму симплексного метода.

В первую таблицу заносится первоначальное допустимое базисное решение (табл. 3.5). Метод составления симплексных таблиц нам уже известен. Напомним только, что

q - коэффициенты линейной формы при переменных, вошедших в базис;

C_j - коэффициенты линейной формы, включая и базисные переменные;

A_j - оценка индексной строки, которая характеризует эффективность включения в план (базис) j -й переменной и показывает, насколько изменится целевая функция на каждую единицу переменной.

65

Таблица 3.5

c_i	Базисные переменные	c_j	5	8	6	0	0	0
		План	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
0	x_4	1200	5	5	2	1	0	0
0	x_5	300	4	0	3	0	1	0
0	x_6	800	0	2	4,8	0	0	1
Индексная строка $\Delta_j = z_j - c_j$		$L(x) = 0$	-5	-8	-6	0	0	0

В последней строке таблицы оценка Δ_j определяется по правилу: элементы столбца q умножаются на соответствующие коэффициенты столбца, для которого определяется оценка, полученные произведения суммируются и из этой суммы вычитается значение коэффициента C_u при данной переменной в линейной форме.

Для столбца, соответствующего переменной x_1 , оценка составит

$$\Delta_1 = 0 \cdot 5 + 0 \cdot 4 + 0 \cdot 0 - 5 = -5;$$

для переменной x_2

$$\Delta_2 = 0 \cdot 5 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 2 - 8 = -8;$$

для переменной x_3

$$\Delta_3 = 0 \cdot 2 + 0 \cdot 3 + 0 \cdot 4,8 - 6 = -6.$$

Для базисных переменных (в табл. 3.5 это x_4, x_5, x_6) оценки всегда равны нулю, так как эти переменные уже вошли в план и определять их эффективность по отношению к плану не требуется.

Первым шагом в анализе первоначального допустимого базисного решения является проверка его на оптимальность. Поскольку оценки Δ_j характеризуют эффективность технологических способов по отношению к сложившейся структуре

Моделирование транспортных процессов

производства, они же и являются показателями оптимальности плана. Так, из первой симплексной таблицы (табл. 3.5) следует, что если включить в план производство продукции первого вида (x_1), то на каждую единицу предприятие получит 5 р. прибыли; второго вида (x_2) - 8 р.; третьего вида (x_3) - 6 р. Наибольшую прибыль в расчете на единицу продукции предприятие получит при производстве продукции второго вида, которому в индексной строке таблицы соответствует наибольшая по абсолютной величине отрицательная оценка. Эту продукцию следует производить в первую очередь.

66

Таблица 3.6

c_i	Базисные переменные	c_j	5	8	6	0	0	0
		План	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
8	x_2	240	1	1	0,4	0,2	0	0
0	x_5	300	4	0	3	0	1	0
0	x_6	320	2	0	4	-0,4	0	1
Индексная строка $\Delta_j = z_j - c_j$		$L(x) = 1920$	3	0	-2,8	1,6	0	0

Следовательно, при решении задач линейного программирования на максимум симплексным методом проверка допустимого базисного решения на оптимальность заключается в отыскании в индексной строке симплексной таблицы наибольшей по абсолютной величине отрицательной оценки (наименьшего отрицательного числа). Столбец таблицы, соответствующий переменной с наибольшей по абсолютной величине отрицательной оценкой, является разрешающим, а сама переменная вводится в базис, что приводит к улучшению плана. Если окажется несколько равных, наибольших по абсолютной величине отрицательных оценок, в базис вводится любая из соответствующих переменных.

Если в индексной строке симплексной таблицы отрицательных чисел нет, это значит, что план не может быть улучшен и получено оптимальное решение, которому соответствует максимальное значение целевой функции. Решение задачи на этом оканчивается.

Базисных переменных должно быть столько, сколько уравнений в системе ограничений. Поэтому, чтобы ввести новую переменную, надо заменить ею какую-то из базисных.

Чтобы установить переменную, выводимую из базиса, составляют отношения свободных членов (в симплексной таблице это столбец „план“) к соответствующим положительным коэффициентам разрешающего столбца (на ноль и на отрицательные числа не делят). Из этих отношений выбирают наименьшее, так как оно определяет количество продукции данного вида, которое можно произвести, исходя из ограниченности неиспользованных ресурсов (материалов). В производстве - это так называемое узкое место при выпуске данной продукции. Соответствующая строка является разрешающей, а базисную переменную этой строки выводят из базиса, заменяя переменной разрешающего столбца.

Моделирование транспортных процессов

Элемент, стоящий на пересечении разрешающего столбца и разрешающей строки, принимается за разрешающий элемент.

В нашем примере (см. табл. 3.5) вместо переменной x_2 в план следует ввести переменную разрешающий элемент - 5.

Переход к новому базису осуществляется преобразованием симплексной таблицы и составлением новой (табл. 3.6).

67

Компоненты каждого столбца симплексной таблицы представляют собой не просто числа, а являются коэффициентами замещения данным технологическим способом каждого из способов, включенных в план. Так, компоненты вектор-столбца x_2 (первая симплексная таблица, табл. 3.5) показывают, что при включении в план производства продукции второго вида интенсивность использования технологического способа уменьшится на 5 ед., интенсивность способа x_5 не изменится, интенсивность способа уменьшится на 2 ед. При этом прибыль предприятия увеличится на 8 р. Действительно, если обратиться к условиям задачи, то установим, что на производство одной запасной части второго вида тратится 5 ед. материала первого сорта, 2 ед. материала третьего сорта; материал второго сорта при изготовлении этих запасных частей не используется. При реализации запасных частей второго вида предприятие получит 8 р. прибыли.

Имея такую информацию, можно предсказать, что, исходя из ограниченности материалов первого сорта, предприятие сможет произвести всего 240 ед. ($1200:5$) запасных частей второго вида (наименьшее из отношений свободных членов к положительным элементам разрешающего столбца) и получит от этого прибыль 1920 р. ($8 \cdot 240$). При изготовлении будет израсходовано все 1200 ед. ($5 \cdot 240$) материалов первого сорта и 480 ед. ($2 \cdot 240$) материалов третьего сорта.

Убедимся в правильности таких рассуждений при разработке нового плана производства (вторая симплексная таблица).

Преобразования симплексной таблицы начинаются с разрешающей строки, для чего все элементы делятся на разрешающий элемент 5 и заносятся во вторую симплексную таблицу (см. табл. 3.6).

Остальные элементы новой симплексной таблицы определяются по правилу прямоугольника и правилу расчета оценок индексной строки. Преобразованные элементы записываются в соответствующие клетки второй симплексной таблицы.

Для сокращения расчетов следует иметь в виду следующее:

в новой таблице на месте разрешающего элемента всегда будет единица, а остальные элементы разрешающего столбца - нули;

если в разрешающем столбце окажется ноль, то соответствующая ему строка переписывается в новую симплексную таблицу без изменений;

если в разрешающей строке имеется ноль, то соответствующий ему столбец перейдет в новую таблицу без изменений.

В нашем примере во вторую симплексную таблицу перейдут без изменений вторая строка, пятый (x_5) и шестой (x_6) столбцы.

В результате преобразований по алгоритму симплексного метода получен новый допустимый базисный план:

$$x_1 = 0; x_2 = 240; x_3 = 0; x_4 = 0; x_5 = 300; x_6 = 320.$$

Экономический смысл его в том, что рекомендуется производить запасных частей второго вида 240 ед. и предприятие получит от этого

68

Таблица 3.7

c_j	Базисные переменные	c_j	5	8	6	0	0	0
		План	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
8	x_2	208	1,2	1	0	0,24	0	-0,1
0	x_5	60	5,5	0	0	0,30	1	-0,75
6	x_3	80	-0,5	0	1	-0,10	0	0,25
Индексная строка $\Delta_j = z_j - c_j$		$L(x) = 2144$	1,6	0	0	1,32	0	0,7

прибыль 1920 р. При этом материалы первого сорта будут использованы полностью, остатки материалов второго и третьего сортов составят соответственно 300 и 320 ед., т.е. материалы второго сорта не используются совсем, а материалов третьего сорта будет израсходовано 480 ед. (800 - 320). Высказанные предположения подтверждаются, расчетами.

Полученный план производства запасных частей не является оптимальным при заданных условиях, так как в индексной строке второй симплексной таблицы (см. табл. 3.6) имеется отрицательная оценка (-2,8), соответствующая переменной x_2 . Это значит, что план может быть улучшен за счет производства запасных частей третьего вида (разрешающий столбец *3), поскольку в результате производства единицы продукции этого вида предприятие получит дополнительную прибыль 2,8 р.

Наименьшее отношение свободных членов к положительным элементам разрешающего столбца ($320:4 = 80$) соответствует базисной переменной (разрешающая строка). Разрешающий элемент 4. Следовательно, для дальнейшего улучшения плана, представленного во второй симплексной таблице, необходимо ввести в базис переменную x_3 , а вывести x_2 .

Заполним третью симплексную таблицу (табл. 3.7), используя правило деления элементов разрешающей строки на разрешающий элемент, правило прямоугольника и правило расчета оценок индексной строки. Столбцы, соответствующие переменным x_2 и x_5 в новую таблицу перейдут без изменений.

- В третьей симплексной таблице в индексной строке нет отрицательных оценок. Следовательно, полученный план улучшен быть не может и является оптимальным, линейная форма $L(x)$ достигает своего максимального значения. Оптимальное решение: $x_1 = 0$; $x_2 = 208$; $x_3 = 80$; $x_4 = 0$; $x_5 = 60$; $x_6 = 0$.

Экономический смысл оптимального решения таков: чтобы получить максимальную прибыль 2144 р., предприятие должно производить запасных частей второго вида 208 ед., запасных частей третьего вида -

69

80 ед. Запасные части первого вида производить нецелесообразно; $x_6 = 60$ означает, что 60 ед. сырья второго вида осталось неиспользованным. Материалы первого и третьего видов используются полностью, так как $x_1 = 0$, $x_6 = 0$, т.е. остатков этих материалов нет.

Полученное решение проверяют, подставляя значения переменных в систему симплексных уравнений:

Моделирование транспортных процессов

$$5 \cdot 0 + 5 \cdot 208 + 2 \cdot 80 + 0 = 1200;$$

$$4 \cdot 0 + 3 \cdot 80 + 60 = 300;$$

$$2 \cdot 208 + 4 \cdot 80 + 0 = 80;$$

$$L(x) = 8 \cdot 280 + 6 \cdot 80 = 2144.$$

Значения переменных удовлетворяют условиям задачи, следовательно, решение правильно.

Ценную информацию представляют коэффициенты и оценки оптимального плана (см. табл. 3.7).

Компоненты основных переменных, не вошедших в план, показывают, насколько следует изменить интенсивность вошедших в оптимальный план технологических процессов при необходимости введения в план производства единицы продукции по способу, который не вошел в этот план.

Например, если по какой-либо причине предприятию потребуется наладить производство запасных частей первого вида, то на каждую единицу их производства необходимо сократить производство запасных частей второго вида на 1,2 ед., расход материалов второго сорта увеличится на 5,5 ед., производство запасных частей третьего вида необходимо увеличить на 0,5 ед. От этого предприятие понесет убыток 1,6 р.

Такое положение обусловлено следующим. Производство запасных частей второго вида сократится на 1,2 ед., а каждая единица приносит предприятию прибыль 8 р., значит, за счет сокращения производства будет потеряно 9,6 р. (1,2 · 8) прибыли. Производство запасных частей третьего вида увеличится на 0,5 ед., а каждая единица дает предприятию 6 р. прибыли, следовательно, прибыль увеличится на 3 р. При этом будет произведена и одна запасная часть первого вида, от реализации которой предприятие получит 5 р. прибыли. В итоге при производстве каждой запасной части первого вида предприятие потеряет 1,6 р. (-9,6 + 5 + 3).

Исходя из ограниченности ресурсов второго сорта, предприятие сможет произвести запасных частей первого вида около 11 ед. (60:5,5). Общие потери прибыли при этом составят 176 р. (1,6 · 11).

Установим, почему на 5,5 ед. увеличится расход материалов второго сорта. Эти материалы расходуются на производство запасных частей первого и третьего видов (см. условие задачи). На одну запас

70

ную часть первого вида расходуют 4 ед., а третьего вида - 3 ед. материала второго сорта. Производство запасных частей первого вида увеличится на единицу, третьего вида - на 0,5 ед. Общий расход материала этого вида увеличится на 5,5 ед. (4 + 3 · 0,5).

По отношению к коэффициентам замещения для основных переменных задачи можно сформулировать общее правило:

положительный коэффициент показывает, насколько сократится интенсивность соответствующего технологического способа, вошедшего в базис, при введении в план производства единицы продукции данного вида; отрицательный коэффициент показывает увеличение интенсивности соответствующего

Моделирование транспортных процессов

технологического способа, вошедшего в базис, при включении в план производства единицы продукции данного вида.

Для дополнительных переменных x_4 , x_5 , x_6 (количество Недоиспользованных материалов соответственно первого, второго и третьего сортов) коэффициенты замещения показывают, как следует изменить интенсивность запланированных технологических способов при дополнительном выделении единицы соответствующего сорта материала, чтобы получить изменение целевой функции на величину оценки, указанной в индексной строке так, чтобы увеличить прибыль предприятия на 1,32 р. При дополнительном выделении единицы материала первого сорта x_4 необходимо - увеличить производство продукции второго вида на 0,24 ед., сократить производство продукции третьего вида на 0,1 ед., при этом высвобождаются материалы второго сорта в количестве 0,3 ед.

При дополнительном выделении, например, единицы материалов третьего сорта необходимо сократить на 0,1 ед. производство продукции второго вида, увеличить расход (уменьшить запас) материалов второго сорта на 0,75 ед. и увеличить производство продукции третьего вида на 0,25 ед. Прибыль предприятия от этого увеличится на 0,7 р. *

Следовательно, для дополнительных переменных положительный коэффициент замещения показывает увеличение, а отрицательный - уменьшение интенсивности соответствующего технологического способа, вошедшего в план производства при дополнительном выделении единицы сырья данного вида.

Оценки индексной строки для основных переменных, не вошедших в оптимальный план, показывают, сколько прибыли пришлось бы потерять, если была бы произведена единица продукции Соответствующего вида. Для дополнительных переменных эти оценки показывают, сколько единиц прибыли приносит единица материалов данного вида при производстве продукции. Так, единица материалов первого вида приносит предприятию 1,32 р., третьего вида - 0,75 р. прибыли. Оценка для сырья второго вида равна нулю, это означает, что ресурсы сырья второго вида не лимитируют производство, имеются его излишки.

71

Следовательно, информация, содержащаяся в промежуточных и последней симплексной таблицах, представляет значительную ценность для проведения экономического анализа, прогнозирования развития и управления автотранспортным производством.

Вопрос 2. Симплексный метод с искусственным базисом

В этом случае, если ограничения задачи линейного программирования заданы неравенствами типа $>$ (больше или равно) или равенствами, то для определения первого базисного допустимого решения может использоваться метод искусственного базиса. В этом случае в систему ограничений вводятся искусственные переменные, которые принимаются за базисные и минимизируется дополнительная линейная форма, представляющая собой сумму искусственных переменных. Если в результате решения искусственные переменные станут свободными, а дополнительная линейная форма - равной нулю, то получено первое допустимое базисное решение исходной задачи и можно приступить к решению задачи. Если же дополнительная линейная форма больше нуля - задача не имеет допустимого решения, ее условия противоречивы. Таким образом, при использовании метода искусственного базиса вначале решают задачу по минимизации дополнительной линейной формы, а затем уже основную, в которой

Моделирование транспортных процессов

минимизируют исходную линейную форму. Отметим, что вместо последовательной оптимизации двух целевых функций (линейных форм) можно рассматривать одну целевую функцию как сумму дополнительной и исходной линейной форм. Это так называемая М-задача.

Свое название задача получила от того, что все искусственные переменные вводят в целевую функцию с коэффициентом М. При решении задачи на максимум М - это очень большое по абсолютной величине отрицательное число, при решении задачи на минимум М - это очень большое положительное число. При этом условии в окончательном варианте решения искусственные переменные всегда будут равны нулю, поскольку при решении задачи на максимум в оптимальный план не могут войти переменные, которые имеют в целевой функции очень большие по абсолютной величине отрицательные коэффициенты, так как это уменьшает функционал. И наоборот, при решении задачи на минимум наличие в функционале переменных с очень большим положительным коэффициентом не уменьшает, а увеличивает его.

Если во всех случаях применять один и тот же алгоритм симплексного метода для решения задачи на минимум, т.е. в задаче на максимум производить преобразования целевой функции* заменяя знаки при переменных на противоположные, то под М понимают положительное число, большее любого числа, с которым придется его сравнивать.

72

Чтобы освоить методику решения задач линейного программирования с искусственным базисом, решим предыдущую задачу по максимизации прибыли при изготовлении запасных частей по алгоритму симплексного метода для задач на минимум. На этом же примере изложим и суть метода скорейшего спуска.

В условия задачи предварительно введем ограничение, заключающееся в том, что предприятию поставлено условие выпустить запасных частей первого вида не менее 20 ед., запасных частей второго вида - не менее 150 ед. Данное ограничение выразится неравенствами

$$x_1 \geq 20; x_2 \geq 150.$$

Задача заключается в том, чтобы максимизировать, линейную форму

$$L(x) = 5x_1 + 8x_2 + 6x_3$$

при условиях

$$x_1 \geq 20;$$

$$x_2 \geq 150;$$

$$5x_1 + 5x_2 + 2x_3 \leq 1200;$$

$$4x_1 + 3x_3 \leq 300;$$

$$2x_2 + 4,8x_3 \leq 800;$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0.$$

Преобразуем неравенства в уравнения путем введения дополнительных переменных x_4 и x_5 соответственно в левую часть первого и второго неравенств с коэффициентом - 1 и переменных x_6 , x_7 и x_8 с коэффициентом 1 в третье, четвертое и пятое неравенства. Получим

Моделирование транспортных процессов

$$x_1 - x_4 = 20;$$

$$x_2 - x_5 = 150;$$

$$5x_1 + 5x_2 + 2x_3 + x_6 = 1200;$$

$$4x_1 + 3x_3 + x_7 = 300;$$

$$2x_2 + 4,8x_3 + x_8 = 800.$$

Поскольку $\max L(x) = -\min(-L(x))$, поменяем знаки коэффициентов целевой функции на противоположные и будем минимизировать

73
Таблица 3.8

c_i	Базисные переменные	c_j	-5	-8	-6	0	0	0	0	0	0	0
		План	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}
M	x_9	20	1	0	0	-1	0	0	0	0	1	0
M	x_{10}	150	0	1	0	0	-1	0	0	0	0	1
0	x_6	1200	5	5	2	0	0	1	0	0	0	0
0	x_7	300	4	0	3	0	0	0	1	0	0	0
0	x_8	800	0	2	4,8	0	0	0	0	1	0	0
$\Delta_j = \sum c_i a_{ij} - c_j$		$L(x)$	M+5	M+8	6	-M	-M	0	0	0	0	0

эту функцию. В целевую функцию дополнительные переменные войдут с нулевыми коэффициентами:

$$L'(x) = -5x_1 - 8x_2 - 6x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 + 0x_7 + 0x_8.$$

Здесь x_4 означает избыток запасных частей первого вида в сравнении с обязательным минимумом, равным 20 ед.; x_5 - избыток запасных частей второго вида над обязательным минимумом в 200 ед.; x_6, x_7, x_8 - количество неиспользованных материалов соответственно первого, второго и третьего сортов. Непосредственно за базисные переменные могут быть приняты переменные x_9, x_{10} и x_{11} , всего же переменных в базисе должно быть пять, т. е. недостает двух базисных переменных.

Допишем их, введя, искусственные переменные x_9 и x_{10} в первое и второе уравнения* В целевую функцию переменные x_9 и x_{10} войдут с коэффициентом M - очень большое положительное число. Тогда

$$x_1 - x_4 + x_9 = 20;$$

$$x_2 - x_5 + x_{10} = 150;$$

$$5x_1 + 5x_2 + 2x_3 + x_6 = 1200;$$

$$4x_1 + 3x_3 + x_7 = 300;$$

$$2x_2 + 4,8x_3 + x_8 = 800;$$

$$L'(x) = -5x_1 - 8x_2 - 6x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 + 0x_7 + 0x_8 + M(x_9 + x_{10}).$$

Моделирование транспортных процессов

Решим уравнения системы относительно базисных переменных $x_9, x_{10}, x_6, x_7, x_8$ и занесем это решение в симплексную таблицу (табл. 3.8).

При решении задачи обычным способом для определения разрешающего столбца используются оценки индексной строки симплекс

74
ной таблицы. При этом если задача решается на максимум, выбирается наибольшая по абсолютной величине отрицательная оценка, если на минимум - наименьшая положительная оценка. Переменная, соответствующая этим оценкам, вводится в базис; выводится из базиса переменная, для которой отношение свободного члена к положительному элементу разрешающего столбца наименьшее. Такой способ обеспечивает механический подход к решению задачи с большим объемом вычислительной работы, так как иногда приходится выполнять дополнительные итерации (переходы) в случае, когда введенную в базис переменную в последующем приходится выводить из него.

Более рациональным является так называемый метод скорейшего спуска, суть которого заключается в следующем. Для каждого столбца, соответствующего переменной, не включенной в базис, определяется оценка индексной строки Δ_j и минимальное отношение свободных членов к положительным элементам этих столбцов. Затем определяется их произведение, т.е. произведение оценки на соответствующее минимальное отношение. Столбец, для которого это произведение будет наибольшим, принимается за разрешающий, соответствующая ему переменная вводится в базис. Из базиса выводится переменная, соответствующая минимальному отношению свободных членов к коэффициентам разрешающего столбца. Произведение $\Delta_j \theta_j$ показывает величину изменения целевой функции. Поэтому, чтобы скорее достичь оптимума (скорейшего спуска), из произведений выбирается наибольшее.

Для первой симплексной таблицы (см. табл. 3.8)

$$\Delta_1 = M + 5, \theta_1 = 20, \Delta_1 \theta_1 = 20M + 100;$$

$$\Delta_2 = M + 8, \theta_2 = 150, \Delta_2 \theta_2 = 150M + 1200;$$

$$\Delta_3 = 6, \theta_3 = 100, \Delta_3 \theta_3 = 600.$$

Учитывая, что M очень большое положительное число, наибольшим произведением является $\Delta_2 \theta_2$. Следовательно, разрешающим будет второй столбец, разрешающей строкой - вторая строка, разрешающий элемент равен единице. Следовательно, в базис вводится переменная x_2 , выводится из базиса искусственная переменная x_4 . Отметим, что при выводе из базиса искусственной переменной она полностью исключается из дальнейших преобразований, поскольку возвращать ее снова в базис нет смысла.

Преобразования и переход к следующей симплекс-таблице производятся обычным способом. В результате получим табл. 3.9.

Во второй симплексной таблице (см. табл. 3.9)

$$\Delta_1 = M + 5, \theta_1 = 20, \Delta_1 \theta_1 = 20M + 100;$$

$$\Delta_3 = 6, \theta_3 = 100, \Delta_3 \theta_3 = 600;$$

$$\Delta_5 = 8, \theta_5 = 90, \Delta_5 \theta_5 = 720.$$

Таблица 3.9

c_i	Базисные переменные	c_j	-5	-8	-6	0	0	0	0	0	M
		План	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9
M	x_9	20	1	0	0	-1	0	0	0	0	1
-8	x_2	150	0	1	0	0	-1	0	0	0	0
0	x_6	450	5	0	2	0	5	1	0	0	0
0	x_7	300	4	0	3	0	0	0	1	0	0
0	x_8	500	0	0	4,8	0	2	0	0	1	0
$\Delta_j = z_j - c_j$		$L(x)$	$M+5$	0	6	$-M$	+8	0	0	0	0

Наибольшим произведением является b_{1B} . Переменная x_1 вводится в базис, выводится из базиса искусственная переменная x_9 , которая из дальнейшего решения исключается полностью.

В результате преобразований перейдем к табл. 3.10.

При переходе от третьей симплексной таблицы к четвертой в базис вводится переменная x_5 , выводится из базиса переменная x_4 . Проведя необходимые преобразования, получим табл. 3.11.

В индексной строке табл. 3.11 только одна положительная оценка, равная 2,8, соответствующая переменной x_3 . В этом случае не требуется определять наибольшее произведение. В базис вводится переменная с положительной оценкой, т.е. переменная x_3 , выводится из базиса переменная, которой соответствует наименьшее отношение свободных членов к положительным элементам разрешающего столбца, в данном случае это переменная x_7 .

После симплексных преобразований от четвертой таблицы перейдем к пятой (табл. 3.12).

Таблица 3.10

c_i	Базисные переменные	c_j	-5	-8	-6	0	0	0	0	0
		План	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
-5	x_1	20	1	0	0	-1	0	0	0	0
-8	x_2	150	0	1	0	0	-1	0	0	0
0	x_6	350	0	0	2	5	5	1	0	0
0	x_7	220	0	0	3	4	0	0	1	0
0	x_8	500	0	0	4,8	0	2	0	0	1
$\Delta_j = z_j - c_j$		$L(x)$	0	0	6	5	8	0	0	0

Таблица 3.11

Моделирование транспортных процессов

c_i	Базисные переменные	c_j	-5	-8	-6	0	0	0	0	0
		План	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
-5	x_1	20	1	0	0	-1	0	0	0	0
-8	x_2	220	0	1	0,4	1	0	0,2	0	0
0	x_5	70	0	0	0,4	1	1	0,2	0	0
0	x_7	220	0	0	3	4	0	0	1	0
0	x_8	360	0	0	4	-2	0	-0,4	0	1
$\Delta_j = z_j - c_j$		-1860	0	0	2,8	-3	0	-1,6	0	0

В индексной строке табл. 3.12 оценки либо отрицательные, либо равны нулю, все искусственные переменные выведены из базиса, следовательно, получено оптимальное решение, в котором; $x_2 = 190,67$; $x_3 = 73,33$; $x_4 = 0$; $x_5 = x_1 = 20$; $x_6 = 0$; $x_7 = 0$; $x_8 = 6,68$.

Линейная форма достигает своего минимума:

$$L'(x) = -5x_1 - 8x_2 - 6x_3 = -5 \cdot 20 - 8 \cdot 190 - 6 \cdot 73,33 = -2065,3.$$

Поскольку в исходной задаче требовалось найти максимум целевой функции, то у найденного минимума функции $L(x)$ следует изменить знак на противоположный, т.е.

$$\max C(x) = -\min(-L(x)) = -\min L(x) = -(-2065,3) = 2065,3 \text{ р.}$$

Экономический смысл оптимального плана состоит в том, что согласно ему рекомендуется произвести запасных частей первого вида 20 ед., второго - 190,67 («191), третьего - 73,33 ед. (*73). Избытка запасных частей первого вида не должно быть ($x_4 = 0$). Запасных частей

Таблица 3.12

c_i	Базисные переменные	c_j	-5	-8	-6	0	0	0	0	0
		План	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
-5	x_1	20	1	0	0	-1	0	0	0	0
-8	x_2	190,67	0	1	0	-2,33	0	0,2	-0,133	0
0	x_5	40,67	0	0	0	-2,33	1	0,2	-0,133	0
-6	x_3	73,33	0	0	1	1,33	0	0	0,33	0
0	x_8	66,68	0	0	0	-5	0	-0,4	-1,33	1
$\Delta_j = z_j - c_j$		-2065,3	0	0	0	-5,1	0	0	-0,93	0

77

Таблица 3.13

Моделирование транспортных процессов

c_i	Базисные переменные	c_j	0	0	2	-4
		План	x_1	x_2	x_3	x_4
0	x_1	6	1	0	3	2
0	x_2	12	0	1	1	4
Индексная строка $\sum c_i a_{ij} - c_j$		$L(x) = 0$	0	0	-2	4

второго вида рекомендуется произвести на 40,67 ед. ($\gg 41$) больше установленного минимума в 150 ед. Значения $x_6 = 0$ и $x_7 = 0$ указывают на то, что материалы первого и второго сортов используются полностью.. Остаток материалов третьего сорта составит 66,68 ед. При этом предприятие получит максимальную прибыль 2065,3 р.

Проверим полученное решение. Для этого расчетные значения переменных необходимо подставить в симплексные уравнения

$$20 - 0 + 0 = 20;$$

$$190,67 - 40,67 + 0 = 150;$$

$$5 \cdot 20 + 5 \cdot 190,67 + 2 \cdot 73,33 + 0 = 1200;$$

$$4 \cdot 20 + 3 \cdot 73,33 + 0 = 300;$$

$$2 \cdot 190,67 + 4,8 \cdot 73,33 + 66,67 = 800.$$

Уравнения выполняются, следовательно, решение является правильным. Отметим, что незначительные погрешности вызваны из-за округления числовых значений элементов симплексных таблиц.

В заключение отметим, что, применяя метод скорейшего спуска, окончательное решение получено за четыре итерации. Для получения этого же решения обычным симплексным методом необходимо шесть итераций. Это свидетельствует о значительных преимуществах метода скорейшего спуска, трудоемкость решений задачи в данном случае сократилась на 50 %.

Вырождение в симплексном методе. Базисное решение называется вырожденным, если значения одной или нескольких переменных равна нулю.

1 Рассмотрим пример, сформулированный в табл. 3.13.

Нужно, минимизировать целевую функцию.

Полученное базисное решение (см. табл. 3.13) не является оптимальным, так как в индексной строке есть одна положительная оценка, равная 4 и соответствующая переменной x_4 . Эта переменная должна вводиться в базис.

Определим обычным путем, какая из переменных x будет исключена из базиса. Для этого установим, для какого из значений x частное от деления элементов столбца свободных членов на соответствующие

Моделирование транспортных процессов

c_j	Базисные переменные	c_j	0	0	2	-4
		План	x_1	x_2	x_3	x_4
0	x_1	$6:2 = 3$	$1:2 = 1/2$	$0:2 = 0$	$3:2 = 3/2$	$2:2 = 1$
0	x_2	$12:4 = 3$	$0:4 = 0$	$1:4 = 1/4$	$1:4 = 1/4$	$4:4 = 1$

элементы столбца x_4 будут наименьшими. В данном примере результат не будет однозначным. Получено два одинаковых частных, которые являются наименьшими, а именно: x_1 ($6 : 2 = 3$) и x_2 ($12 : 4 = 3$). Это и является случаем вырождения, так как мы должны включить в базис одну переменную x^* а вывести две; x_1 и x_2 . Тем самым базис из размерности, равной двум, „выродится“ до размерности, равной единице.

Это обстоятельство не позволяет определить ключевую строку, что затрудняет решение задачи.

В случае вырождения существует особая последовательность перехода к новому базису. При этом важно решить, какую из двух переменных (а их может быть и больше) следует исключить из базиса, а какую (какие) оставить для следующего этапа решения. Поступают в этом случае следующим образом.

По каждой строке, соответствующей переменной, которая должна быть исключена из базиса, т.е. x_1 и x_2 , в направлении слева направо имеющиеся элементы делят на элемент этой же строки, находящийся в столбце переменной, которая должна быть введена в базис, т.е. x_4 . Результаты от такого действия приведены в табл. 3.14.

Просматривая результаты вновь слева направо (важно не изменить порядок x), определяют, где раньше появится алгебраически меньший результат. Очевидно, это в строке x_2 где $0:4 = 0$. Это значит, что переменная x_2 должна быть исключена из базиса, а переменная x_1 остается в базисе в следующем этапе. Следовательно, разрешающей строкой будет строка x^* , а разрешающим элементом будет 4.

Таким способом устраняют вырожденность в симплексном методе.

Контрольные вопросы

1. Какие задачи решают симплексным методом?
2. Особенность решения задач симплексным методом на максимум.
3. Особенность решения задач симплексным методом на минимум.
4. Смысл первого шага в анализе первоначального допустимого базисного решения.
5. В чем заключается смысл проверки допустимого базисного решения на оптимальность при решении задач линейного программирования симплексным методом на максимум?
6. В каком случае может использоваться метод искусственного базиса?
7. В каком случае в систему ограничений вводятся искусственные переменные?
8. Существо метода скорейшего спуска.

Лекция 7. Способы составления первого допустимого плана перевозок

Вопросы лекции:

8. Распределительный метод и его модификации
9. Способы составления первого допустимого плана перевозок

Вопрос 1. Распределительный метод и его модификации

Распределительный метод широко применяется при решении, главным образом, различных транспортных задач (оптимальное прикрепление потребителей груза к поставщикам, маршрутизация перевозок грузов, распределение парка подвижного состава по АТП, закрепление маршрутов за АТП и др.), поэтому его иногда называют транспортным методом.

Прежде чем перейти к изложению алгоритма метода, познакомимся с особенностями транспортной задачи. Классическая транспортная задача заключается в нахождении оптимальных грузопотоков, т.е. в оптимальном закреплении поставщиков однородного груза за потребителями.

Экономико-математическая модель транспортной задачи в общем виде выглядит следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \sum_j x_{ij} &= a_i \quad (i = 1, 2, \dots, n) \\ \sum_i x_{ij} &= b_j \quad (j = 1, 2, \dots, m) \end{aligned} \right\} x_{ij} \geq 0;$$

$$\sum_i a_i = \sum_j b_j;$$

$$\sum_i \sum_j c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min,$$

где i — количество поставщиков; j — количество потребителей; c — ограничения по предложению; b_j — ограничения по спросу; c_{ij} — элементы целевой функции; x_{ij} — объем корреспонденции между i -й и j -й точками.

Критерием оптимальности в транспортной задаче может быть минимум грузовой работы в тонно-километрах, затраты времени или стоимость перевозки.

Рассмотрим конкретный пример транспортной задачи. Пусть имеется три грузообразующих точки A_1, A_2, A_3 из которых следует вывезти однородный груз четырем потребителям (B_1, B_2, B_3, B_4) соответственно 400, 600 и 1000 т. При этом потребителю B_1 необходимо доставить 200 т груза, B_2 - 400, B_3 - 800 и B_4 - 600 т.

Расстояния между грузоотправителями и потребителями указаны в табл. 4.1. Методы определения кратчайших расстояний между пунктами, приведенные в таблице, рассматриваются в п. 5.1.

Необходимо так закрепить потребителей груза за грузоотправителями, чтобы общая транспортная работа была минимальной.

80

Таблица 4.1

Моделирование транспортных процессов

Грузообразующие точки	Грузопоглощающие точки			
	B_1	B_2	B_3	B_4
	Расстояние, км			
A_1	16	6	10	4
A_2	8	2	12	14
A_3	2	18	8	6

В этой задаче неизвестно количество груза, которое следует перевозить от каждого отправителя конкретному потребителю.

Обозначим через x_{ij} количество тонн груза, которое должно быть перевезено от i -го поставщика j -му потребителю. Тогда модель задачи выразится следующей системой уравнений:

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 400 \quad (1)$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 600 \quad (2)$$

$$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 1000 \quad (3)$$

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} = 200 \quad (4)$$

$$x_{12} + x_{22} + x_{32} = 400 \quad (5)$$

$$x_{13} + x_{23} + x_{33} = 800 \quad (6)$$

$$x_{14} + x_{24} + x_{34} = 600 \quad (7)$$

Целевая функция будет представлять собой сумму произведений расстояний на соответствующий объем перевозок груза, т :

Целевая функция будет представлять собой сумму произведений расстояний на соответствующий объем перевозок груза, т :

$$(16x_{11} + 6x_{12} + 10x_{13} + 4x_{14} + 8x_{21} + 2x_{22} + 12x_{23} + 14x_{24} + 2x_{31} + 18x_{32} + 8x_{33} + 6x_{34}) \rightarrow \min$$

Все неизвестные могут принимать положительные значения или равняться нулю, т.е. $x_{ij} \geq 0$.

Модель транспортной задачи имеет следующие особенности: выражается неопределенной системой линейных уравнений и, следовательно, имеет бесчисленное множество возможных решений; она совместна, т.е. имеет решение; элементами матрицы системы являются единицы и нули; система является линейно зависимой, так как любое ее уравнение можно представить в виде линейной комбинации остальных уравнений.

Моделирование транспортных процессов

Грузообразующие точки	Грузопоглощающие точки				Итого по вывозу, т	Потенциалы
	B_1	B_2	B_3	B_4		
A_1	200	200	400	600	400	-16
A_2	200	400	600	1000	600	-12
A_3	200	400	600	1000	1000	-8
Итого по вывозу, т	200	400	800	600	2000	
Потенциалы	0	+10	0	+2		

Например, если из суммы уравнений (1), (2), (3) вычесть суммы уравнений (4), (5) и (6), то получим уравнение (7);

число линейно независимых уравнений всегда на одно меньше общего количества уравнений в системе, так как без любого одного уравнения каждое оставшееся уравнение нельзя представить как линейную комбинацию из других уравнений. Следовательно, базис системы равен количеству уравнений за вычетом единицы. В нашем примере базис равен $6(7 - 1 - 6)$;

целевая функция выражается линейной формой. Матрица целевой функции - это матрица-строка, элементами которой могут быть расстояния, время или стоимость перевозки.

Ввиду особенностей математической формы и постановки транспортной задачи линейного программирования для решения ее разработаны специальные методы, позволяющие из бесчисленного множества возможных решений найти оптимальное. Одним из таких методов является распределительный, имеющий несколько разновидностей, которые отличаются в основном способом выявления оптимального решения.

Первый способ (Метод Хичкова). В табл. 4.2 записаны исходные данные задачи. Расстояния между грузообразующими и грузопоглощающими точками проставлены в правых верхних углах клеток. Строки отведены под грузообразующие точки, столбцы - под грузопоглощающие. В конце строки указаны ограничения по вывозу, в конце столбца - ограничения по ввозу. Дополнительный столбец и строка отведены для потенциалов. Эта таблица называется матрицей распределительного метода.

Распределение груза по потребителям производится начиная с грузоотправителя A_x и грузополучателя B_h т.е. с клетки $A \setminus B$. Потребность в грузе потребителя $B \setminus$ удовлетворяется полностью грузоотпра

82

вителем $A \setminus$. В клетку $A \setminus B$ табл. 4.2 записывается объем потребления грузополучателя $B \setminus$ - 200 т. Оставшийся в точке $A \setminus$ груз в количестве 200 т будет вывозиться потребителю B_2 . Но потребителю B_2 нужно завезти не 200, а 400 т груза. Недостающие 200 т груза можно ввозить от грузоотправителя A_2 . Оставшиеся у грузоотправителя A_2 400 т груза можно вывезти в точку B_3 и т.д. Рассуждая таким образом, распределим весь груз по потребителям.

Моделирование транспортных процессов

В табл. 4.2 распределение груза по потребителям (закрепление потребителей за грузоотправителями) выразится в заполнении клеток A_1B_1 , A_1B_2 , A_1B_3 , A_1B_4 , A_2B_1 , A_2B_2 , A_2B_3 , A_2B_4 , A_3B_1 , A_3B_2 , A_3B_3 , A_3B_4 .

Условимся в дальнейшем называть клетки таблицы, в которых отмечено количество груза, перевозимого от грузоотправителя к данному грузополучателю, загруженными. Количество загруженных клеток всегда должно равняться величине базиса, который будет равен $p + t - 1$ (p - число строк таблицы; t - число столбцов). В данном примере это условие соблюдено: $3 + 4 - 1 = 6$.

При нашем распределении груза по потребителям первой загруженной клеткой стала левая верхняя клетка A_1B_1 таблицы, остальные загруженные клетки расположились по диагонали, соединяющей левый верхний и правый нижний углы таблицы. Поэтому такой способ первоначального закрепления грузополучателей за грузоотправителями, а следовательно, способ первого заполнения таблицы, получил название „диагональный метод“, или „метод северо-западного угла“.

Полученный таким способом план закрепления потребителей груза за грузоотправителями является одним из возможных решений задачи. При этом общая $p \times t$ -узловая работа будет равна:

$$200 \times 16 + 200 \times 6 + 200 \times 2 + 400 \times 12 + 400 \times 8 + 600 \times 6 = 16\,400 \text{ т} \cdot \text{км}$$

Однако нельзя сказать, является ли полученный вариант решения оптимальным или нет. Чтобы ответить на этот вопрос, необходимо выполнить следующие действия:

1. Во всех загруженных клетках получают нулевой потенциал.

Для этого по строчкам и столбцам табл. 4.2 к расстояниям, проставленным в верхних правых углах клеток, прибавляют такие числа (потенциалы), которые в сумме с расстояниями загруженных клеток дают нуль (нулевой потенциал).

Например, чтобы получить в загруженной клетке нулевой потенциал, нужно ко всем расстояниям строки A_1 прибавить потенциал - 16 ($16 - 16 = 0$).

В загруженной клетке A_1B_2 нулевой потенциал получится в том случае, если к ее расстоянию 6 и ранее прибавленному по строке A_1 потенциалу - 16 прибавить по столбцу B_2 Потенциал + 10 ($6 - 16 + 10 = 0$) и т.д.

2. Определяют потенциалы для всех свободных клеток, т.е. находят для каждой свободной клетки сумму указанного в ней расстояния

83
Таблица 4.3

Грузообразующие точки	Грузопоглощающие точки				Итого по вывозу, т
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	200 0	200 0	400 -6	600 -10	400
A_2	400 -4	200 0	400 0	600 4	600
A_3	600 -6	200 20	400 0	600 0	1000
Итого по ввозу, т	200	400	800	600	2000

с ранее полученными по загруженным клеткам потенциалами ее строки и столбца.

Моделирование транспортных процессов

При решении задачи на минимум оптимальный вариант получается в том случае, когда во всех загруженных клетках стоят нулевые потенциалы, а потенциалы всех свободных клеток являются положительными величинами.

Если задача решается на максимум, то оптимальный вариант получается тогда, когда во всех загруженных клетках стоят нулевые потенциалы, а потенциалы всех свободных клеток являются отрицательными величинами.

Наличие свободных клеток с отрицательными значениями потенциалов (при решении задачи на минимум) говорит об имеющихся резервах, используя которые можно получить лучший вариант решения.

В первом варианте решения нашей задачи отрицательные потенциалы имеются в клетках (табл. 4.3). A_1B_4 , A_2B_1 , A_1B_3 , A_3B_1 Наиболее потенциальной клеткой (клетка, имеющая наибольшее отрицательное значение потенциала) будет клетка A_1B_4 , потенциал которой равен, -10.

Во втором шаге решения наиболее потенциальная клетка получает загрузку. Это вызывает перераспределение загрузки клеток таблицы, которое осуществляется следующим образом:

1. Проверяют, чтобы количество загруженных клеток в предыдущем шаге равнялось $n + m - 1$.

Если количество загруженных клеток меньше, чем $n + m - 1$ (случай вырождения), то недостающее число клеток получается путем загрузки соответствующего количества свободных клеток нулями. Клетка, в которой будет проставлена загрузка, равная нулю, считается загруженной.

2. Для наиболее потенциальной клетки A_1B_4 строится контур.

84

Контуром называется замкнутая ломаная линия, образованная прямыми отрезками, углы соединений между которыми равны 90° .

Строится контур так, чтобы все углы, кроме одного, располагались в загруженных клетках, а один угол находился в свободной, наиболее потенциальной клетке.

При соблюдении этих двух правил для каждой свободной клетки можно построить только один контур.

3. Определяют положительные (+) и отрицательные (-) углы контура, считая, что первый положительный угол лежит в свободной клетке, для которой строится контур, рядом с ним находятся отрицательные углы, рядом с отрицательными - положительные и т.д.

Количество положительных углов всегда равно количеству отрицательных углов контура.

4. Выявляют наименее загруженную клетку, занятую отрицательным углом контура. Количество груза, указанное в этой клетке, отнимается из всех клеток, занятых отрицательными углами контура, и прибавляется во все клетки, занятые положительными углами.

В результате такого действия одна или несколько из ранее загруженных клеток становятся свободными, а наиболее потенциальная клетка становится загруженной. Ранее загруженные клетки, которые не оказались расположенными в углах контура, переносят в таблицу (табл. 4.4) нового варианта закрепления потребителей груза за грузоотправителями без изменений.

Моделирование транспортных процессов

В табл. 4.3 из всех клеток, занятых отрицательными углами контура, наименьшую загрузку имеет клетка A^{\wedge} - 200 т. Эти 200 т вычитаются из клеток, занятых отрицательными углами контура, и прибавляются в клетки, занятые положительными углами. В результате клетка A^{\wedge} становится свободной, а наиболее потенциальная клетка A_1B_4 получает загрузку в 200 т. Загрузка клетки в кото-

Таблица 4.4

Грузообразующие точки	Грузопоглощающие точки				Итого по вывозу, т	Потенциалы
	B_1	B_2	B_3	B_4		
A_1	200 16	6	10	200 4	400	-16
A_2	8	400 2	200 12	14	600	-22
A_3	2	18	600 8	400 6	1000	-18
Итого по ввозу, т	200	400	800	600	2000	
Потенциалы	0	+20	+10	+12		

85

рой нет угла контура, в новом варианте решения остается без измене* ; ния (см. табл. 4.4).

Полученный таким образом новый вариант закрепления потребителей за грузоотправителями, является возможным решением задачи. При этом варианте общая транспортная работа

$$200 \cdot 16 + 200 \cdot 4 + 400 \cdot 2 + 200 \cdot 12 + 600 \cdot 8 + 400 \cdot 6 = 14\,400 \text{ т-км.}$$

Это на 2000 т*км меньше, чем получено в первом варианте решения. Величину сокращения грузооборота можно определить и как произведение количества груза, которое получила наиболее потенциальная клетка, на ее потенциал $[200 \cdot (-10)] = -2000 \text{ т-км.}$

Чтобы убедиться, является ли полученный вариант оптимальным, следует повторить все действия, рассмотренные выше, т.е. нужно по новым загруженным клеткам подобрать потенциалы строк и столбцов и определить потенциалы для свободных клеток. Если вариант ока* жется неоптимальным, то необходимо построить контур для новой наиболее потенциальной клетки и найти лучший вариант решения. Задача решается до тех пор, пока не будет найден оптимальный; вариант.

Количество промежуточных решений зависит от сложности задачи. В нашем примере второй вариант, как и первый, является неоптимальным (табл. 4.5), оптимальный же вариант получен в результате третьего шага решения (табл. 4.6).

Оптимальность третьего варианта решения подтверждается тем, что в свободных клетках таблицы этого варианта потенциалы являются положительными величинами (табл. 4.7).

Объем грузовой работы при оптимальном решении:

$$400 \cdot 4 + 400 \cdot 2 + 200 \cdot 12 + 200 \cdot 2 + 600 \cdot 8 + 200 \cdot 6 = 11\,200 \text{ т-км.}$$

Моделирование транспортных процессов

Второй способ (метод Креко). От рассмотренного выше этот способ отличается приемом нахождения потенциалов для свободных клеток.

Таблица 4.5

Грузообразующие точки	Грузопоглощающие точки				Итого по вывозу, т
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	200 - 0	10	4	200 + 0	400
A_2	-14	400 0	200 0	4	600
A_3	-16	20	600 0	-400 0	1000
Итого по ввозу, т	200	400	800	600	2000

86

Таблица 4.6

Грузообразующие точки	Грузопоглощающие точки				Итого по вывозу, т	Потенциалы
	B_1	B_2	B_3	B_4		
A_1	16	6	10	4	400	-4
A_2	8	400 2	200 12	14	600	-10
A_3	2	18	8	6	1000	-6
Итого по ввозу, т	200	400	800	600	2000	
Потенциалы	+4	+8	-2	0		

На основании исходных данных задачи, так же как и при первом способе решения, составляется таблица и делается по диагонали первое распределение груза (табл. 4.8).

Определение оптимального решения начинается с построения контуров для всех свободных клеток. Расстояниям, указанным в клетках положительных углов контура, придается знак плюс, а расстояниям отрицательных углов - знак минус.

Алгебраическая сумма расстояний, стоящих в клетках всех углов контура, будет потенциалом свободной клетки.

Так, у контура свободной клетки A_2B_1 отрицательные углы будут расположены в клетках A_2B_1 , A_2B_3 , положительные - в A_2B_2 . Ее потенциал будет равен:

$$-16-2 + 8 + 6 = -4.$$

Таблица 4.7

Моделирование транспортных процессов

Грузообразующие точки	Грузопоглощающие точки				Итого по вывозу, т
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	16	10	4	0	400
A_2	2	0	0	4	600
A_3	0	20	0	0	1000
Итого по ввозу, т	200	400	800	600	2000

87

Таблица 4.8

Грузообразующие точки	Грузопоглощающие точки				Итого по вывозу, т
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	16	6	-6	10	400
A_2	-4	8	2	12	600
A_3	-6	2	18	8	1000
Итого по ввозу, т	200	400	800	600	2000

У контура клетки $A_i B_j$ отрицательные углы будут находиться в клетках $A_i B_k$ $D_2 \# 2 > ^3 \%$ положительные в $A_i B_l$, $A_i B_j$. Потенциалом этой клетки будет сумма:

$$-16 - 2 - 8 + 2 + 12 + 6 = -6 \text{ и т. д.}$$

Найденные таким путем потенциалы записывают в левых верхних углах свободных клеток.

При решении задачи на минимум оптимальный вариант будет в том случае, когда потенциалы всех свободных клеток станут положительными величинами. Если же есть отрицательные значения потенциалов, то выявляется наиболее потенциальная клетка (в нашем примере такой клеткой будет клетка $A_i B_j$) и по ее контуру (см. табл. 4.8), соблюдая указанные ранее правила, делают перераспределение

Таблица 4.9

Грузообразующие точки	Грузопоглощающие точки				Итого по вывозу, т
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	16	10	6	4	400
A_2	-14	8	2	12	600
A_3	-16	2	18	8	1000
Итого по ввозу, т	200	400	800	600	2000

88

Таблица 4.10

Моделирование транспортных процессов

Грузообразующие точки	Грузопоглощающие точки								Итого по вывозу, т
	В ₁		В ₂		В ₃		В ₄		
A ₁	16	16	10	6	4	10		4	400
A ₂	1	8		2		12	4	14	600
A ₃		2	20	18		8		6	1000
Итого по ввозу, т	200		400		800		600		200

груза. С новым вариантом решения (табл. 4.9) производят те же действия, что и с предыдущим, и так далее до получения оптимального решения (табл. 4.10).

Третий способ (модифицированный распределительный метод - МОДИ, или метод потенциалов). Условие задачи записано в табл. 4.11. Первое распределение груза производится по диагональному методу. Для оценки оптимальности решения подбираются потенциалы следующим образом.

Потенциал для первой строки таблицы берется равным нулю. Затем по расстояниям загруженных клеток подбираются потенциалы для других строчек и столбцов таблицы так, чтобы расстояние каждой

Таблица 4.11

Грузообразующие точки	Потенциалы	Грузопоглощающие точки								Итого по вывозу, т
		В ₁		В ₂		В ₃		В ₄		
		16		6		16		14		
A ₁	0	200	16	200	6	16	10	14	4	400
A ₂	-4	12	8	200	2		12	10	14	600
A ₃	-8	8	2	-2	18		8		6	1000
Итого по ввозу, т		200		400		800		600		2000

89

загруженной клетки равнялось сумме потенциалов строки и столбца, в которых находится данная клетка:

$$L_{ij} = N_i + M_j,$$

где N_j — потенциал строки; M_j — потенциал столбца

Так, если для первой строки таблицы взят потенциал, равный нулю, то потенциал столбца будет равен 16, так как разность между расстоянием загруженной клетки и потенциалом первой строки равна 16 ($16 - 0 = 16$).

Потенциал второго столбца V_3 будет равен 6 ($6 - 0 = 6$), ибо расстояние загруженной клетки $A_j V_g$ равно 6. Тогда потенциал строки A_i будет определен по расстоянию загруженной клетки $A^{\wedge} \Psi$ и найденному потенциалу столбца Ψ ($2 - 6 = -4$).

Потенциал столбца V_3 определяется через расстояние загруженной клетки $A\phi$ и найденный потенциал второй строки: $12 - (-4) - 16$,

Моделирование транспортных процессов

Таким же образом находят потенциалы строки A_3 и столбца B^*

Если число загруженных клеток будет меньше, чем $p + t - 1$, то потенциалы для некоторых строк и столбцов невозможно определить. Чтобы устранить это препятствие, недостающее количество клеток, как и в предыдущих способах, загружают нулями.

Загружать нулями следует те клетки, которые лежат на пересечении строк или столбцов, не имеющих потенциалов, со столбцами или строками, для которых уже определены. При этом наиболее целесообразно выбрать из этих клеток такие, в которых имеются наименьшие расстояния.

Клетки, загруженные нулями, рассматриваются как обычные загруженные клетки*.

После того как будут найдены потенциалы, определяют их сумму для каждой свободной клетки. Эти суммы указаны в верхних левых углах свободных клеток.

При решении задачи на минимум оптимальный вариант будет получен в том случае, когда в каждой свободной клетке сумма потенциалов не превышает указанного в ней расстояния. При решении задачи на максимум - наоборот, когда сумма потенциалов превышает расстояние.

Если оптимальное решение не получено, то выявляется клетка с наибольшим потенциалом. Затем строится для нее контур с соблюдением изложенных выше правил и по контуру делается перераспределение груза тем же путем, что и в предыдущих способах. Действия повторяются до тех пор, пока не будет найден оптимальный вариант.

Клеткой, имеющей наибольший потенциал при решении задачи на минимум, является клетка, у которой имеется наибольшая разность между суммой потенциалов и расстоянием, проставленным в клетке.

90

Таблица 4.12

Грузооб- разующие точки	Потен- циалы	Грузопоглощающие точки				Итого по выво- зу, т
		B_1	B_2	B_3	B_4	
		16	-4	6	4	
A_1	0	200 -	16 -4	6 6	10 200 +	4 400
A_2	6	22	8 400	2 200	12 10	14 600
A_3	2	18 +	2 -2	18 600	8 400 -	6 1000
Итого по ввозу, т		200	400	800	600	2000

В нашем примере такой клеткой является клетка A_1B_4 (см, табл. 4.11), Ее потенциал равен $10(14 - 4 - 10)$,

Перераспределение грузов по ее контуру дает новый вариант решения задачи (табл. 4.12), который не является еще оптимальным. В этом варианте наиболее потенциальной будет клетка A_3B_1 . Ее потенциал равен $16(18 - 2 - 16)$.

Перераспределение загрузки по контуру клетки A_3B_1 позволяет найти оптимальное решение задачи (табл. 4.13).

Третий способ распределительного метода по сравнению с первым и вторым является менее трудоемким. Количество арифметических действий при этом способе решения задач меньше, чем при первых двух.

Следует отметить, что при решении задач различными способами распределительного метода, когда количество одинаковых наиболее

Моделирование транспортных процессов

Таблица 4.13

Грузооб- разующие точки	Потен- циалы	Грузопоглощающие точки								Итого по выво- зу, т
		B_1		B_2		B_3		B_4		
		0		-4		6		4		
A_1	0	0	16	-4	6	6	10		4	400
A_2	6	6	8		2		12	10	14	600
A_3	2		2	-2	18		8		6	1000
Итого по ввозу, т		200		400		800		600		2000

91

Таблица 4.14

Автобаза	Потен- циалы	Грузоотправитель								Парк авто- мобилей, шт.
		B_1		B_2		B_3		B_4		
		$U_i \backslash V_j$	0	3	3	2				
A_1	0		8	0	3		5		2	200
A_2	-2		4	200	1		6		7	200
A_3	1	100	1		9	300		4	100	500
Потребность в ав- томобилях, шт.		100		200		300		300		900

потенциальных клеток будет больше одной, мы можем получить равнозначные (альтернативные) по своей величине оптимальные решения, но с разными вариантами распределения загрузки-

Вырождение в задачах линейного программирования. Решение или распределение является вырожденным, если в нем имеется менее $t + p - 1$ заполненных клеток, поскольку из-за недостатка заполненных клеток нельзя построить циклы пересчета для части свободных клеток.

Для устранения вырождения необходимо количество заполненных клеток довести до $t + p - 1$. Для этого среди свободных клеток выбирается ровно столько, сколько не хватает заполненных клеток до $t + p - 1$ и в них помещают нулевые загрузки.

Выбор клеток для загрузки нулем удобно производить с помощью ¹ графа¹, построенного по имеющемуся распределению. В таком графе не все узлы будут связаны друг с другом, поскольку количество ветвей в нем меньше $t + p - 1$. Недостающие ветви графа и будут соответствовать тем свободным клеткам, которые следует загрузить нулем, это легко

сделать. При построении графа ветви должны быть направлены от поставщиков к потребителям.

Допустим, поставлена задача распределить обслуживание клиентов между автобазам таким образом, чтобы суммарный пробег автомобилей от автобаз до грузоотправителей был минимальным. Наличие автомобилей в автобазе, потребность в них грузоотправите*- лей, а также расстояния между пунктами

указаны в табл. 4.14. В ней пригздено также первоначальное решение, составленное способом

¹ Граф — это набор точек, называемых узлами, которые связаны между собой отрезками линий, называемых ветвями.

92

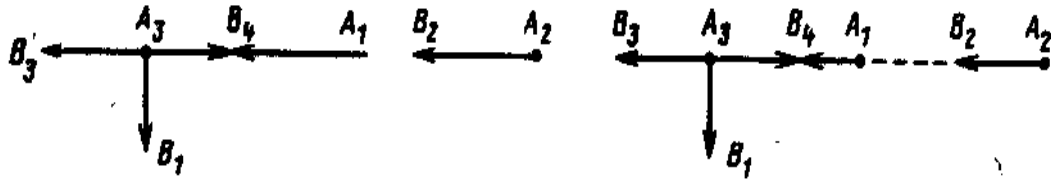


Рис. 4.1. Схема определения места нулевой загрузки

двойного предпочтения. Число заполненных клеток пять, что на единицу меньше необходимого $m + n - 1 = 3 + 4 - 1 = 6$. Следовательно, имеет место вырождение первоначального решения. Проверить такое распределение на оптимальность нельзя, поскольку нет возможности определить все потенциалы.

Для определения места нулевой загрузки построим граф, соответствующий вырожденному решению (рис. 4.1).

В общем графе узел М не связан с остальными узлами. Чтобы получить недостающую связь, следует соединить ветвью узлы А\ и %. На рис. 4.1 это обозначено пунктирной линией, указывающей точку, в которую следует поместить нулевую загрузку, т.е. в клетку А\В₂ необходимо поставить нуль. В результате число загруженных клеток? увеличится до $m + n - 1$, вырождение будет устранено.

После этого полученное решение можно проверить на оптимальность с помощью потенциалов. Решение является оптимальным, так как характеристики всех незанятых клеток положительны. Грузоотправители обслуживаются рациональным образом, общий пробег автомобилей к ним минимален и равен

$$L(x) = 1 \cdot 100 + 1 \cdot 200 + 4 \cdot 300 + 2 \cdot 200 + 3 \cdot 100 = 2200 \text{ км.}$$

Аналогично устраняется вырождение и в других случаях при улучшении первоначального плана перевозок.

Вопрос 2. Способы составления первого допустимого плана перевозок

В основе математических методов, применяемых при решении транспортных задач, лежит принцип последовательного улучшения плана, когда на первом этапе определяется первоначальное допустимое решение, т.е. план, удовлетворяющий условиям задачи, а затем этот план проверяется на оптимальность, если необходимо, улучшается; полученный новый план снова проверяется на оптимальность и т.д. Этот процесс продолжается до тех пор, пока не будет получено оптимальное решение.

От того, насколько эффективно составлено распределение перевозок в начальном плане, насколько близко начальное решение к оптимальному, зависит количество промежуточных итераций, необходимых для достижения оптимального решения.

Таблица 4.15

Суточное производство и потребность в кирпиче, т				Расстояние от перевозки, км					
Завод	Объем произ- водства	Строй- тельные площадки	Потреб- ность в кирпиче	Завод	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	100	B_1	25	A_1	15	12	16	21	18
A_2	300	B_2	150	A_2	15	22	22	14	12
A_3	75	B_3	100	A_3	10	5	17	6	10
A_4	125	B_4	175	A_4	6	13	18	22	18
		B_5	150						

Первоначальное распределение перевозок может быть получено , несколькими способами.

Рассмотрим на конкретном примере сущность и эффективность некоторых из них. От четырех кирпичных заводов кирпич автомобильным транспортом доставляется на пять строительных площадок. Необходимо определить план перевозок кирпича, при котором величина транспортной работы будет минимальной. Исходные данные задачи приведены в табл. 4.15.

Способ северо-западного угла. Построение допустимого плана этим способом начинается с верхней левой клетки и заканчивается в нижней правой клетке матрицы. В клетки заносят максимально возможную поставку, учитывая соотношение ресурсов поставщика и спрос потребителя. Груз первого поставщика распределяется так, что вначале удовлетворяются потребности первого ^потребителя, затем второго и так до полного распределения всего объема грузов данного поставщика. Затем переходят к распределению грузов второго поставщика и так до полного распределения объема грузов всех поставщиков. Если спрос какого-либо потребителя превышает наличие груза у поставщика, то недостающий спрос удовлетворяется за счет следующего поставщика, т.е. расчет в этом случае ведется по столбцу.

Допустимый план перевозки кирпича на строительные площадки, составленный способом северо-западного угла, приведен в табл. 4.16. В плане полностью соблюдается условие по ввозу и вывозу кирпича, количество заполненных клеток соответствует $m + n - 1$.

Суммарная транспортная работа по плану распределения, составленному способом северо-западного угла, равна

$L(x) = 15 \cdot 25 + 12 \cdot 75 + 22 \cdot 75 + 22 \cdot 100 + 14 \cdot 125 + 6 \cdot 50 + 10 \cdot 25 + 18 \cdot 125 = 9675$ т·км.

Этот способ прост, однако первоначально допустимое решение, как правило, далеко от оптимального, поскольку заполнение клеток матрицы идет механически без учета расстояния или стоимости пере* возки.

Моделирование транспортных процессов

Завод	Строительная площадка					Объем произ- водства, т	
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5		
A_1	25	15	12	16	21	18	100
A_2		15	22	22	14	12	300
A_3		10	5	17	6	10	75
A_4		6	13	18	22	18	125
Потребность в кир- пиче, т	25	150	100	175	150	600	

Способ наименьшего элемента в матрице. Этот способ заключается в том, что максимально возможная поставка заносится в клетку с самым минимальным элементом во всей матрице, затем выбирается следующий по величине минимальный элемент (расстояние) и в эту клетку заносится величина поставки с учетом соотношения спроса и ресурсов. Исходная программа перевозки кирпича на строительные площадки, составленная способом минимального элемента в матрице, приведена в табл. 4.17.

Функционал полученного решения:

$$L(x) = 6 \cdot 25 + 12 \cdot 75 + 5 \cdot 75 + 16 \cdot 25 + 18 \cdot 75 + 14 \cdot 50 + 12 \cdot 150 + 22 \cdot 25 = 7625 \text{ т} \cdot \text{км.}$$

Таблица 4.17

Завод	Строительная площадка					Объем произ- водства, т
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	15	12	16	21	18	100
A_2	15	22	22	14	12	300
A_3	10	5	17	6	10	75
A_4	6	13	18	22	18	125
Потребность в кир- пиче, т	25	150	100	175	150	600

95'

Способ наименьшего элемента в матрице. Этот способ заключается в том, что максимально возможная поставка заносится в клетку с самым минимальным элементом во всей матрице, затем выбирается следующий по величине минимальный элемент (расстояние) и в эту клетку заносится величина поставки с учетом соотношения спроса и ресурсов. Исходная программа перевозки кирпича на строительные площадки, составленная способом минимального элемента в матрице, приведена в табл. 4.17.

Функционал полученного решения:

$$L(x) = 6 \cdot 25 + 12 \cdot 75 + 5 \cdot 75 + 16 \cdot 25 + 18 \cdot 75 + 14 \cdot 50 + 12 \cdot 150 + 22 \cdot 25 = 7625 \text{ т} \cdot \text{км}.$$

Обычно способ наименьшего элемента в матрице дает допустимое решение, более близкое к оптимальному, чем способ северо-западного угла. В условии нашего примера общий объем транспортной работы меньше на 2050 т·км ($9675 - 7625 = 2050$).

Способ наименьшего элемента в матрице целесообразно использовать при решении небольших матриц, поскольку с увеличением размера матрицы его применение затрудняется. В данном случае хорошие результаты дает способ двойного предпочтения.

Способ двойного предпочтения. Он заключается в нахождении минимального элемента в столбце и его проверке на минимальность по строке. Если этот элемент окажется наименьшим и по столбцу, и по строке, то в данную клетку записывают максимально возможную поставку, и все элементы данной строки или столбца из дальнейшего рассмотрения исключают.

Если минимальный элемент в столбце не является минимальным в строке, то временно этот столбец из рассмотрения опускают и переходят к следующему. После рассмотрения всех столбцов возвращаются к пропущенным и операции повторяют. Так поступают до тех пор, пока не будет получено базисное распределение.

Базисное распределение, полученное способом двойного предпочтения, приведено в табл. 4.18.

Допустимое распределение, полученное способом двойного предпочтения, обычно не отличается от распределения способом минимального элемента в матрице, что подтвердилось и в нашем случае: загрузки клеток и функциональные элементы совпали.

Способ аппроксимации Фогеля. При этом способе первое допустимое распределение является близким к оптимальному и по сути является приближенным решением задачи.

96'

Таблица 4.18

Завод	Строительная площадка					Объем производства, т
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	15	12	16	21	18	100
A_2	15	22	22	14	12	300
A_3	10	5	17	6	10	75
A_4	6	13	18	22	18	125
Потребность в кирпиче, т	25	150	100	175	150	600

При этом способе исходная матрица дополняется столбцом и строкой разностей (табл. 4.19). Затем в каждой строке и каждом столбце матрицы отыскивают два наименьших элемента и определяют абсолютную разность между ними, которую заносят соответственно разности по строке в столбец разностей, разности по столбцам - в строку разностей. Если две клетки в одной и той же

Моделирование транспортных процессов

строке или столбце имеют одинаковые значения элементов, то разность для этой строки или столбца принимается равной нулю и также проставляется в соответствующую строку или столбец.

Затем выбирают наибольшую величину разности независимо от того, стоит ли она в столбце или строке разностей. В клетку с минимальным элементом в данной строке или столбце заносят максимально возможную загрузку, учитывая при этом соотношение ресурса поставщика и спрос потребителя. Наибольшая разность зачеркивается. Если окажется, что спрос потребителя полностью удовлетворен или ресурс поставщика полностью исчерпан, в соответствующей строке или столбце разностей проставляется буква „К" (конец) и данная строка или столбец матрицы из дальнейшего рассмотрения исключается. После заполнения клетки матрицы разности пересчитывают, и операции повторяются вновь до тех пор, пока не будет составлена допустимая программа распределения. При наличии двух одинаковых наибольших разностей, загрузку записывают в клетку, которая имеет меньший элемент по строке и столбцу. Такая клетка называется седловой. Последние распределения можно сделать без вычисления разностей, поскольку остается несколько незагруженных клеток, поставки в которые очевидны.

Таблица 4.19

Завод	Строительная площадка					Объем производства, т	Столбец разностей
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5		
A_1	15	12	16	21	18	100	*
A_2	15	22	22	14	12	300	2
A_3	X	X	X	75	X	75	1K
A_4	6	13	18	22	18	125	7
Потребность в кирпиче, т	25	150	100	175	150	600	
Строка разностей	4	7	1	8	2		

97

Рассмотрим использование способа аппроксимации Фогеля для составления допустимой программы перевозки кирпича на строитель* ные площадки (см. табл. 4,19).

Наименьшие элементы первой строки (см. табл. 4.19) - это 12 в клетке A_1B_2 и 15 в клетке A_1B_1 . Разность между ними, равная 3, записывается в первую клетку столбца разностей. Аналогично находят разности для остальных строк и столбцов. Наибольшая разность, равная 8, находится в строке разностей по столбцу B_4 . Следовательно, первой должна заполняться клетка в этом столбце с минимальным элементом. Это клетка A_3B_4 с элементом, равным 6. В нее можно поместить максимальную загрузку, равную 75 т, что соответствует объему производства завода A_3 . Поэтому в столбце разностей по строке A_3 записывается буква /С, что означает конец вычислений по данной строке, т.е. элементы данной строки в дальнейших расчетах не учитывают. Клетки строки A_3 можно отметить каким-либо значком, например х.

Моделирование транспортных процессов

После этого разности пересчитывают вновь, и процесс заполнения клеток матрицы повторяется. Для упрощения расчетов следует руководствоваться следующим положением: если на предыдущем этапе знак „К” проставлен в строке разностей, то следует пересчитывать только показатели столбца разностей, показатели строки разностей остаются без изменения. Если „К” стоит в столбце разностей, как в нашем примере, то пересчитывают только показатели строки разностей, а показатели столбца разностей остаются без изменения, т.е. в строке или столбце разностей, где появляется знак „К”, показатели не пересчитывают. При появлении „К” одновременно в строке и столбце разностей пересчитывают показатели как строки, так и столбца.

В данном случае „К” стоит в столбце разностей, поэтому на втором этапе пересчитаны только показатели строки разностей, а в столбце они оставлены прежними, процесс заполнения клеток матрицы повторяется. Этапы расчетов по составлению первого допустимого плана перевозок кирпича способом аппроксимации Фогеля представлены в табл. 4.20.

Общая транспортная работа согласно полученному способом аппроксимаций Фогеля допустимому решению составит

$L(x) = 6 \cdot 25 + 12 \cdot 50 + 13 \cdot 100 + 6 \cdot 50 + 22 \cdot 50 + 14 \cdot 100 + 6 \cdot 75 + 12 \cdot 150 = 7600$ т·км.

Статистический метод. Этот метод по сути является приближенным методом решения транспортных задач и задач размещения производства. Метод заключается в определении „наиболее выгодных” клеток матрицы задачи и их заполнении в определенной очередности.

Эффективность статистического метода состоит в том, что клетки матрицы для заполнения определяют все сразу, а не последовательно как обычно, что значительно упрощает решение, и во многих случаях полученное распределение соответствует оптимальному решению.

98

Таблица 4.20

Завод	Строительная площадка					Объем производства, т	Столбец разностей
	B ₁	B ₂	B ₃	B ₄	B ₅		
A ₁	15 X	12 50	16 50	21 X	18 X	100	3, 4, 4
A ₂	15 X	22 X	22 50	14 100	12 150	300	2, 2, 10, К
A ₃	10 X	5 X	17 X	6 75	10 X	75	1, К
A ₄	6 25	13 100	18 X	22 X	18 X	125	7, 6, 6, К
Потребность в кирпиче, т	25	150	100	175	150	600	
* Строка разностей	4, 9, К	7, 1, 1, К	1, 2, 2, К	8, 7, К	2, 6, К		

Основным положением статистического метода является следующее. При перевозках в любом случае возникают какие-то минимальные транспортные затраты, обусловленные общим расположением доставщиков и потребителей и не зависящие от схем прикрепления. Затраты сверх этого предела зависят от рациональности схемы прикрепления поставщиков к потребителям, которые

Моделирование транспортных процессов

собственно и определяют эффективность общего решения. Поэтому необходимо сводить к минимуму не общие транспортные затраты, а только вторую их часть.

Относительные значения транспортных расходов определяются по методу отклонения от средних. При этом для каждой строки и столца рассчитывают, средние затраты по доставке единицы продукта, соответственно C_i и C_j . Это и есть минимальные транспортные расходы поставщика или потребителя, которые он понесет в любом случае, при любом способе прикрепления поставщиков к потребителям. Если вычесть соответствующие средние характеристики из каждого конкретного значения транспортных затрат, проставленных в клетках матрицы, то полученная разность будет отражать только ту часть затрат, которая зависит от схемы прикрепления поставщиков к потребителям. Они-то и служат показателем очередности использования транспортных коммуникаций. Вначале заполняют клетки с большим значением разности, чтобы избежать больших потерь.

Показатели очередности заполнения клеток исходной матрицы рассчитывают так:

$$d_{ij} = C_{ij} - (\bar{C}_i + \bar{C}_j),$$

99

Таблица 4.21

Завод	Строительная площадка					Объем производства, т
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	15	12	16	21	18	100
A_2	15	22	22	14	12	300
A_3	10	5	17	6	10	75
A_4	6	13	18	22	18	125
Потребность в кирпиче, т	25	150	100	175	150	600

где C_{ij} – транспортные затраты (расстояние) в клетке ij ; \bar{C}_i – средние транспортные затраты i -й строки, которые определяют из выражения $\bar{C}_i = \sum_{j=1}^n C_{ij}/n$; \bar{C}_j – средние транспортные затраты j -го столбца, определяемые из выражения $\bar{C}_j = \sum_{i=1}^m C_{ij}/m$.

Заполнение матрицы начинают с клетки с наибольшим по величине показателем очередности, поскольку это обеспечивает максимальное приближение к минимально необходимым транспортным затратам. При этом в клетку заносят максимально возможную поставку с учетом соотношения спроса потребителя и наличия груза у поставщика. Заполнение клеток продолжается до полного удовлетворения спроса на транспортные услуги за счет наличных ресурсов.

Полученный статистическим методом исходный план перевозок проверяют на оптимальность с помощью потенциалов и, если необходимо, улучшают путем перемещения загрузок по замкнутому конуру, как и обычно.

Моделирование транспортных процессов

Основное преимущество статистического метода - это его простота, высокая эффективность, так как часто полученное распределение совпадает с оптимальным планом. Важным является также то, что очередность использования транспортных коммуникаций остается неизменной при любом изменении ресурсов и потребностей. Это дает возможность заранее составлять таблицы очередности использования транспортных коммуникаций и использовать их в оперативном планировании и управлении перевозками.

Эффективность статистического метода рассмотрим на том же примере доставки кирпича на строительные площадки. Условия задачи даны в табл. 4.21.

Таблица 4.22

Завод	Строительная площадка					Средние по строкам
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	-12,9 (12)	-17,4 (6)	-18,65 (4)	-11,15 (14)	-12,9 (12)	16,4
A_2	-13,5 (10)	-8 (19)	-13,25 (11)	-18,75 (3)	-9,5 (17)	17,0
A_3	-11,1 (15)	-17,6 (5)	-10,86 (16)	-19,35 (2)	-14,1 (9)	9,6
A_4	-20,9 (1)	-15,4 (8)	-15,65 (7)	-9,15 (18)	-11,9 (13)	15,4
Средние по столбцам	11,5	13,0	18,25	15,75	14,5	—

Показатели очередности заполнения клеток матрицы приведены в табл. 4.22. При их расчете вначале были определены средние значения для каждого столбца и каждой строки. Например, для столбца это

$$C_1 = (15 + 15 + 10 + 6)/4 = 11,5; \text{ для строки } A_4 \vec{C}_4 = (6 + 13 + 18 + 22 + 18)/5 = 15,4.$$

Тогда оценка очередности заполнения клетки A_4B_1 такая:

$$d_{41} = C_{41} - (\vec{C}_4 + \vec{C}_1) = 6 - (15,4 + 11,5) = -20,9.$$

Значение показателя очередности заполнения клетки A_4B_1 , равное 20,9, оказалось наибольшим по абсолютной величине. Это значит, что данная клетка должна заполняться в первую очередь, а затем клетки D_3B_4 , A_2B_4 (очередность заполнения клетки указана цифрой в скобках) ИТ. д.

В клетку A_4B_1 заносят максимально возможную поставку 25, т.е. потребность строительной площадки B_1 в кирпиче полностью удовлетворяется кирпичным заводом A_4 . Оставшаяся продукция этого завода, равная $125 - 25 = 100$ т, подлежит дальнейшему распределению. Очередной является клетка A_3B_4 с показателем 19,35. В нее заносят загрузку 75 т и т. д. до полного удовлетворения потребностей строительных площадок в кирпиче.

Полученное статистическим методом первоначальное распределение поставок кирпича, приведенное в табл. 4.21, обеспечивает объем транспортной работы в 7800 т-км.

Проверка этого распределения показала, что оно не является оптимальным и его следует улучшать.

Контрольные вопросы:

1. Для решения каких задач применяется распределительный метод?
2. Особенности транспортной задачи.
3. Особенности модели транспортной задачи.
4. Охарактеризовать метод Хичкова.
5. Охарактеризовать метод Креко.
6. Охарактеризовать метод потенциалов.
7. Сущность способа северо-западного угла.
8. Сущность способа наименьшего элемента в матрице.
9. Сущность способа двойного предпочтения.
10. Сущность способа аппроксимации Фогеля.
11. Сущность статистического метода.

Лекция 8 Методы маршрутизации перевозок грузов

Вопросы лекции:

1. Методы определения кратчайших расстояний между пунктами транспортной сети
2. Методы составления рациональных маршрутов при перевозках массовых грузов

Вопрос 1. Методы определения кратчайших расстояний между пунктами транспортной сети

В условиях значительного роста объемов перевозок грузов в городах для обеспечения наиболее рационального использования подвижного состава и сокращения транспортных затрат большое значение имеет определение кратчайших расстояний между пунктами транспортной сети.

Транспортная сеть представляет собой систему дорог (улиц, города), которые пригодны по качеству дорожного покрытия, ширине проезжей части и открыты для движения подвижного состава.

Транспортная сеть состоит из отдельных элементов. Элементами транспортной сети являются вершины (пункты) и звенья сети. Вершины транспортной сети представляют собой точки на карте города или местности (перекрестки, площади, крупные грузообразующие и грузопоглощающие пункты), наиболее важные для определения расстояний или маршрутов движения автомобилей. Каждой вершине присваивается порядковый номер или другое условное обозначение. Две соседние вершины (два соседних пункта) можно соединить линией, по которой осуществляется непосредственная связь между этими вершинами с указанием расстояния между ними. Эти линии называются звеньями сети. Совокупность вершин и звеньев называется сетью.

Транспортная сеть считается заданной, если определены вершины сети, звенья и их длина.

Определение кратчайших расстояний между пунктами транспортной сети является важной практической задачей организации перевозок, так как дает

Моделирование транспортных процессов

возможность снизить транспортные издержки на перевозку грузов за счет минимизации общего пробега подвижного состава и сокращения времени доставки грузов.

Расстояния между вершинами или пунктами транспортной сети можно определить следующими способами:

замером расстояний от каждого пункта до всех остальных с помощью курвиметра по масштабным картам (плану) местности или города. Этот способ достаточно прост. Однако показания курвиметра необходимо корректировать в зависимости от конкретных реальных условий, т.е. учитывать профиль дорог, качество дорожного покрытия и т.д.;

непосредственным замером расстояний на местности по показаниям спидометра при движении автомобиля по маршруту. Такой способ замера дает возможность определить расстояние между пунк-

124

тами с большой точностью, „от ворот до ворот“, но он связан со значительными материальными и трудовыми затратами.

Если замеры производятся между несоседними, удаленными друг от друга пунктами, то в таком случае от одного пункта к другому может быть несколько путей следования, т.е. имеют место различные варианты движения.

При использовании этих способов определения расстояний нельзя быть уверенным в том, что выбранное расстояние между двумя пунктами является кратчайшим. Этот недостаток особенно существен при определении расстояний между значительно удаленными точками в условиях густо разветвленной транспортной сети, т.е. в крупных городах и экономически развитых районах.

Таким образом, задача определения кратчайших расстояний между пунктами транспортной сети является задачей многовариантной, которая имеет множество допустимых решений. Для нахождения оптимального решения задачи применяются математические методы, позволяющие осуществить решение как вручную, так и с использованием современных ЭВМ.

Метод потенциалов. Определение кратчайших расстояний методом потенциалов заключается в следующем. Начальной точке сети, за которую может быть принята любая из точек, присваивают потенциал, равный нулю, после чего определяют потенциалы соседних с начальной точкой вершин сети, из них выбирают наименьший и присваивают соответствующей вершине, определяют потенциалы соседних с выбранной вершиной точек, из всей совокупности потенциалов выбирают наименьший, который проставляют у соответствующей вершины и т.д. Выбранный потенциал определяет кратчайшее расстояние от начальной вершины до данной, на рисунке эту связь отмечают стрелкой.

Полное решение задачи включает столько этапов, сколько вершин включает транспортная сеть, поскольку каждый раз определяют Кратчайшие расстояния от начальной точки до остальных.

Пусть задана транспортная сеть (рис. 5.1). Ее вершины обозначены буквами, а числа у звеньев показывают расстояния между соседними вершинами.

Потенциалы рассчитывают

$$v_j = v_i + l_{ij},$$

где v_i - потенциал предшествующей (соседней) вершины; l_{ij} - длина звена, соединяющего вершины i и j .

Моделирование транспортных процессов

Отметим, что h_j может быть не равно \wedge (например, в случае одностороннего движения). В этом случае соответствующие точки сети соединяют двумя звеньями с указанием направлений движения и расстояний по каждому направлению (рис. 5.2).

125

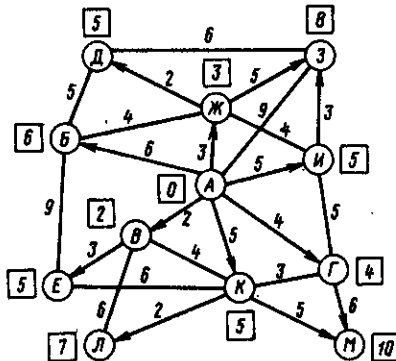


Рис. 5.1. Схема транспортной сети

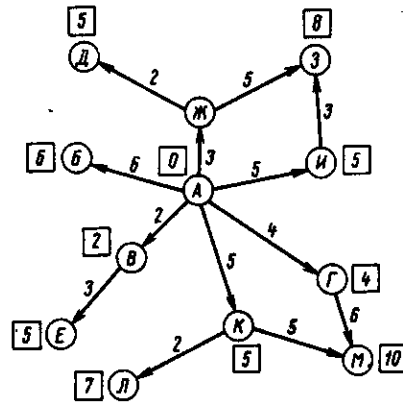


Рис. 5.2. Схема кратчайших расстояний для точки А

На i этапе за начальную точку принята вершина А. Ее потенциал равен нулю, т.е. $v_A = 0$. Соседними к точке А являются вершины: 2, Ж, Я, Г, К, В, З. Их потенциалы:

$$\begin{aligned} 1 \quad v_A &= 0; \\ 9 \quad v_B &= v_A + l_{AB} = 0 + 6 = 6; \\ 3 \quad v_{\text{Ж}} &= v_A + l_{A\text{Ж}} = 0 + 3 = 3; \\ 6 \quad v_{\text{И}} &= v_A + l_{AI} = 0 + 5 = 5; \\ 4 \quad v_{\text{Г}} &= v_A + l_{AG} = 0 + 4 = 4; \\ 5 \quad v_{\text{К}} &= v_A + l_{AK} = 0 + 5 = 5; \\ 2 \quad v_{\text{В}} &= v_A + l_{AV} = 0 + 2 = 2; \\ \cancel{v_Z} &= \cancel{v_A + l_{AZ} = 0 + 9 = 9}. \end{aligned}$$

Из всех вычисленных потенциалов наименьшим является потенциал точки В, равный 2. Этот потенциал проставляют у вершины В на рисунке в прямоугольной рамке и обводят контуром в расчетах, чтобы к нему не возвращаться. У контура, начиная с точки А, проставляют порядковый номер. На рисунке кратчайшую связь отмечают стрелкой от точки А к точке В.

Затем определяют потенциалы точек Е и К, соседних к точке В:

$$7 \quad v_E = v_B + l_{BE} = 2 + 3 = 5;$$

$$\cancel{v_K = v_B + l_{BK} = 2 + 4 = 6}.$$

Из совокупности потенциалов (кроме u_d и $v_{\text{В}}$ которые уже выбраны) наименьший потенциал соответствует точке Ж и равен 3. Это число

126

Моделирование транспортных процессов

проставляют у вершины Ж, отмечают кратчайшую связь от точки А к точке Ж, расчетную формулу заключают в рамку и отвечают порядковым номером 3.

Потенциалы точек Б, Д, З, И, рассчитанные через потенциал точки Ж, равны

~~$$v_B = v_J + l_{JB} = 3 + 4 = 7;$$~~

$$8 \quad v_D = v_J + l_{JD} = 3 + 2 = 5;$$

$$11 \quad v_Z = v_J + l_{JZ} = 3 + 5 = 8;$$

~~$$v_I = v_J + l_{JI} = 3 + 4 = 7$$~~

Из невыбранных потенциалов наименьший 4 соответствует точке Г. Его присваивают этой точке и делают соответствующие отметки.

Используя потенциал точки Г, определяют значения потенциалов для соседних с ней точек К, И, М

~~$$v_K = v_G + l_{GK} = 4 + 3 = 7;$$~~

$$v_I = v_G + l_{GI} = 4 + 5 = 9;$$

$$12 \quad v_M = v_G + l_{GM} = 4 + 6 = 10.$$

Следующий по значению потенциал, равный 5, характерен для нескольких точек сети. В этом случае значение присваивают любой из возможных вершин, например точке К. Этой же вершине соответствуют еще два потенциала 6 и 7, но поскольку их значения выше выбранного, то их вычеркивают. Рассчитаем потенциалы для соседних с точкой К вершин Л, Е, М

$$10 \quad v_L = v_K + l_{KL} = 5 + 2 = 7;$$

~~$$v_E = v_K + l_{KE} = 5 + 6 = 11;$$~~

$$12 \quad v_M = v_K + l_{KM} = 5 + 5 = 10.$$

Такой же потенциал, равный 5, присваивают точкам И, Е, Д и определяют потенциалы соседних с ними вершин

$$11 \quad v_Z = v_I + l_{IZ} = 5 + 3 = 8;$$

~~$$v_B = v_D + l_{DB} = 5 + 5 = 10;$$~~

~~$$v_B = v_E + l_{EB} = 5 + 9 = 14;$$~~

$$v_Z = v_D + l_{DZ} = 5 + 6 = 11.$$

Следующий по порядку потенциал присваивают точке Б. Он равен 6. Соседних с ней вершин без потенциалов нет, соответствующих

127

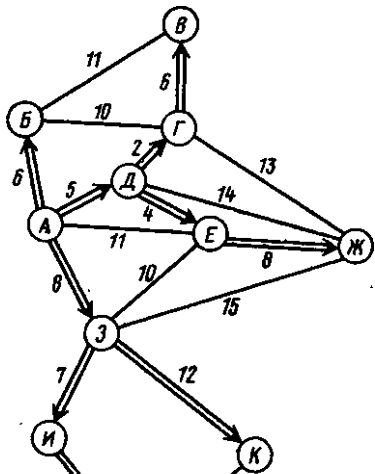


Рис. 5.3. Схема транспортной сети

вычислений поэтому не выполняют. Чтобы продолжить решение задачи, рассматривают оставшуюся совокупность потенциалов. Наименьшим в совокупности является потенциал 7 для точки Л. Потенциалы соседних к ней точек уже рассчитаны, поэтому никаких вычислений не производят, а выбирают следующий потенциал из уже рассчитанных. Это потенциал точки З. Причем этой

Моделирование транспортных процессов

вершине соответствуют два одинаковых потенциала, равные 8. Это значит, что из начальной точки А в пункт З можно попасть двумя путями через вершину Ж и вершину И с одинаковым расстоянием, равным 8 км. Такое же положение характерно и для Точки М, потенциал которой равен 10. В эту вершину можно попасть через пункт К и пункт Г с одинаковым минимальным пробегом - 10 км. Одинаковым по значению

потенциалам для одной и той же точки присваивают один порядковый номер.

Потенциалы всех вершин определены, это значит, что найдены кратчайшие расстояния от точки А к остальным вершинам транспортной сети. На рис. 5.1 они отмечены стрелками. Кратчайшая транспортная сеть может быть изображена отдельно, для точки А (рис. 5.3).

Затем переходят ко II этапу, выбирая за начальную точку любую из вершин сети, кроме вершины А. С помощью потенциалов по описанной методике определяют кратчайшие расстояния от этой точки к остальным точкам транспортной сети и так до тех пор, пока не будут определены кратчайшие расстояния для всех точек сети. По результатам вычислений составляют таблицу кратчайших расстояний в виде так называемой „шахматки" табл. 5.1.

Автоматизированный способ определения кратчайших расстояний между пунктами транспортной сети. Решение этой задачи с использованием ЭВМ производится по методу, получившему в литературе название метода „метлы".

Постановка задачи та же, что и в случае ее решения методом потенциалов.

Задана транспортная сеть: ее вершины, звенья и их длина (рис. 5.3).

Определение кратчайших расстояний от пункта, принятого за начало сети, до всех остальных ведется путем последовательного составления однотипных таблиц.

128'

Таблица 5.1

—	А	Б	В	Г	Д	Е	Ж	З	И	К	Л	М
А		6	2	4	5	5	3	8	5	5	7	10
Б	6		8	10	5	9	4	9	8	11	14	16
В	2	8		6	7	3	5	10	8	4	6	9
Г	4	10	6		9	9	7	8	5	3	5	6
Д	5	5	7	9		10	2	6	6	10	12	15
Е	5	9	3	9	10		8	13	10	4	8	11
Ж	3	4	5	8	2	8		6	5	8	10	13
З	8	9	10	8	6	13	5		3	11	13	14
И	5	8	7	5	6	10	4	3		8	10	11
К	5	11	4	3	10	6	8	11	8		2	5
Л	7	13	6	5	12	8	10	13	10	2		7
М	10	16	9	6	15	11	13	14	11	5	7	

Рассмотрим решение задачи на конкретном примере.

В начале расчета формируется исходная табл. 5.2, в которую заносится: в графу 1 - вершины сети по порядку; в графу 2 - расстояния от вершины,

Моделирование транспортных процессов

выбранной за начало сети, до всех остальных вершин. В табл. 5.2 за начальную вершину принята вершина А, поэтому для нее проставляют расстояние, равное нулю, а для остальных вершин - пока неизвестная величина, равная М, где М - большое положительное число. В графу 3 проставляют единицу против той вершины, для которой необходимо определить или проверить расстояние между ней и другими вершинами. В данном случае единица как условный знак проверки проставлена против вершины А. В графу 4 ставят единицу против вершин, которые являются соседними с начальной, т.е. связаны звеньями с вершиной А. Такими вершинами являются Б, Д, Е, З (см. рис. 5.3).

В графах 3 и 4 ставится единица как условный наиболее удобный знак обозначения при решении задачи на ЭВМ.

Решение выполняют следующим образом.

I этап. Так как можно, пользуясь схемой дорожной сети, определить расстояние от начальной вершины до ее соседних вершин, составляется новая табл. 5.3, в которой в графе 2 у вершин, соседних с начальной и отмеченных единицей в графе 4 табл. 5.2, значения расстояний М меняются на фактические, т.е. проставляются длины звеньев: ДБ, АД, АЕ и АЗ, значения которых по величине М.

129'

Таблица 5.2

Наименование вершин сети (пунктов)	Расстояние	Знак проверки	Соседние вершины
1	2	3	4
А	0	1	—
Б	М	—	1
В	М	—	—
Г	М	—	—
Д	М	—	1
Е	М	—	1
Ж	М	—	—
З	М	—	1
И	М	—	—
К	М	—	—
Л	М	—	—

Таблица 5.3

Наименование вершин сети (пунктов)	Расстояние	Знак проверки	Соседние вершины
1	2	3	4
А	0	+	—
Б	6	1	—
В	М	—	1
Г	М	—	1
Д	5	1	—
Е	11	1	—
Ж	М	—	—
З	8	1	—
И	М	—	—
К	М	—	—
Л	М	—	—

Примечание. Знак означает, что решение не проверено; „+“ - проверка произведена;

В графе 3 табл. 5.3 знак проверки ставится против той вершины, для которой изменилось расстояние М на фактическое, т.е. в данном примере у вершин Б, Д, Е, З. В той же графе для вершины А ставится прочерк, т.е. вершина А считается проверенной.

II этап. Просматриваются подряд все вершины, имеющие знак проверки - единицу в графе 3. Следующей проверяемой вершиной, таким образом, является вершина Б.

В графе 4 табл. 5.3 отмечаются единицами вершины, соседние с вершиной Б. Такими на рис. 5.4 являются вершины Б и Г.

Моделирование транспортных процессов

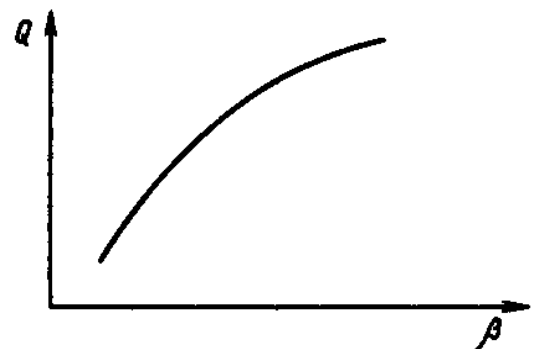
III этап. Определяются звенья, соединяющие проверяемую вершину Б с соседними вершинами, отмеченными в графе 4 (0, Г), и

Таблица 5.4

Наименование вершин сети (пунктов]	Расстояние 1	Знак проверки	Соседние вершины	Наименование вершин сети (пунктов)	Расстояние	Знак проверки	Соседние вершины
1	2	3	4	1	2	3	4
А	0	+		Б	11	1	
Б	6	+	1	Ж	М	-	«■Г
В	17	1	-	З	8	1	-
Г	16	1	1	И	М	-	
Д	5	1	-	К	М	-	-
				Л	М	-	-

130

Рис. 5.4. График функции зависимости выработки единицы подвижного состава от коэффициента использования пробега



выработки единицы подвижного состава от коэффициента использования пробега вычисляется длина этих звеньев (БВпБГ) как сумма расстояния, указанного в графе 2 для проверяемой вершины Б, и расстояния просматриваемого звена. Полученные результаты заносятся в новую табл. 5.4 в графу 2 вместо чисел М у соответствующих вершин.

В графе 3 отмечаются единицами вершины, у которых расстояния М заменены на полученные в результате расчета.

Следующей проверяемой вершиной по порядку является вершина В. Для нее в графе 4 табл. 5.4 отмечаются соседние вершины Ж и Г и снова выполняется шаг 3.

Предыдущая вершина Б считается проверенной, поэтому знак проверки 1 вычеркивается из строки Б (графа 3).

Аналогичные действия выполняются * и для других проверяемых вершин сети (пунктов).

В том случае, когда расстояние до какой-либо вершины было определено раньше и уже занесено в таблицу, при новом определении расстояния для той же самой вершины полученное значение сравнивается с предыдущим и в новую таблицу записывается меньшее значение.

Моделирование транспортных процессов

Например, если в качестве проверяемой выбрана вершина Див таблице 5.4 указано, что расстояние до этой вершины равно 5, то, определяя расстояния от вершины д до соседних с ней вершин Г и Ё, получим следующие значения звеньев:

$$ДГ = 5 + 2 = 7;$$

$$ДБ = 5 + 4 = 9.$$

Таким образом, расстояния от вершины д до вершин Г и Ё меньше, чем указанные в табл. 5.4. Эти меньшие значения расстояний записываются в новую табл. 5.5.

Вершина Г₉ следуя по порядку, уже проверялась, но, поскольку расстояние у этой вершины изменилось, против нее вновь ставится знак проверки 1, и на следующем этапе расчеты проверяются заново относительно этой вершины (т.е. снова проверяется вершина Г после проверки вершины Д).

Так как проверяемой вершиной в результате расчетов опять оказалась вершина Г, в графе 4 табл. 5.5 отмечаются вершины В, Д Ж, соседние с проверяемой, и расчеты продолжаются.

131'

Таблица 5.5

Таблица 5.6

Наименование вершин сети (пунктов)	Расстояние	Знак проверки	Соседние вершины	Наименование вершин сети (пунктов)	Расстояние	Знак проверки	Соседние вершины
1	2	3	4	1	2	3	4
А	0	+		А	0	+	+
Б	6	+	-	Б	6	+	+
В	17	+	1	В	13	+	+
Г	7	1	-	Г	7	+	+
Л	5	+	1	Д	5	+	+
Е	9	1	-	Е	9	+	+
Ж	М	-	1	Ж	17	+	+
З	8	1	-	З	8	+	+
И	М	-	-	И	15	+	+
К	М	-	-	К	20	+	+
Л	М	-	-	Л	24	+	+

Решение задачи методом „метлы" выполняют до тех пор, пока все единицы (знаки проверки) не будут вычеркнуты из столбца проверки (графа 3).

Окончательные результаты расчетов кратчайших расстояний от начальной вершины А до остальных вершин сети представлены в табл. 5.6.

Чтобы определить значения кратчайших расстояний от другой вершины сети до всех остальных, данную вершину выбирают в качестве начальной, и в исходной таблице в графе 2 задают расстояние, равное нулю, остальным вершинам - расстояние М, и вновь выполняют этапы 1,2к3.

Таким образом, общие положения решения задачи определения кратчайших расстояний методом „метлы" сводятся к следующему:

1. Выбирается начальная вершина сети, расстояния от которой до других вершин необходимо определить. В исходную таблицу записывают расстояния: для начальной вершины - 0, для остальных вершин- М.

Моделирование транспортных процессов

2. Определяют длину звеньев, соединяющих начальную вершину с соседними, и расстояния M заменяют в таблице на меньшие, фактические (поскольку требуется найти кратчайшие расстояния между пунктами сети).

3. Вершины сети проверяют последовательно сверху вниз и отмечают знаком проверки в таблице.

4. Значения расстояний, полученные в результате расчетов, заносят в таблицу. Для каждой вершины из нескольких полученных значений выбирают наименьшее расстояние.

5. Процесс решения (цикл) повторяют до тех пор, пока из таблицы не будут вычеркнуты все знаки проверки для вершин сети.

132'

6. Для определения кратчайших расстояний между всеми вершинами сети процесс решения повторяют сначала (пункты 1-5).

Если решение задачи данным методом выполняют вручную, то для снижения трудоемкости вычислений составляют одну таблицу такого типа, как в рассматриваемом примере, в которую вносят соответствующие изменения.

Для большого числа вершин сети расчеты кратчайших расстояний данным методом выполняют на ЭВМ.

Алгоритм решения данной задачи на ЭВМ достаточно прост и позволяет рационально использовать оперативную память ЭВМ, благодаря чему решение задачи для больших объемов исходной информации (транспортные сети с большим количеством вершин) выполняют достаточно быстро.

Решение задачи определения кратчайших расстояний между пунктами транспортной сети динамическим методом рассмотрено в п. 6.1 гл. 6.

Вопрос 2. Методы составления рациональных маршрутов при перевозках массовых грузов

Грузовая работа единицы подвижного состава автомобильного транспорта в тоннах выражается следующим образом:

$$Q = \frac{T_n \cdot v \cdot \beta \cdot q \cdot \gamma}{l_{\text{езд}} + t_{\text{п-р}} \cdot v \cdot \beta},$$

где T_n - время наряда, ч; v - средняя техническая скорость движения, км/ч; β - коэффициент использования пробега; q - номинальная грузоподъемность, т; γ - коэффициент использования грузоподъемности; $l_{\text{езд}}$ - средняя величина пробега автомобиля с грузом за одну езду, км; $t_{\text{п-р}}$ - время простоя под погрузочно-разгрузочными операциями за одну езду, ч.

Если принять

$$T_n \cdot v \cdot q \cdot \gamma = a; l_{\text{езд}} = b; t_{\text{п-р}} \cdot v = f,$$

где a, b, f - const (где * - аргумент), то Q (τ) будет функцией аргумента x :

$$Q = ax/b + fx.$$

Функция Q дробно-линейная. Ее графическое изображение представлено на рис. 5.4.

Моделирование транспортных процессов

Следовательно, если $\beta \rightarrow \max$, то $Q \rightarrow \max$. Поскольку $S_Q = \Sigma Z/Q$ к./т, то при $Q \rightarrow \max$ $S_Q \rightarrow \min$, а также при $\beta \rightarrow \max$ $S_Q \rightarrow \min$. Поскольку ΣZ с увеличением β возрастает в меньших размерах (S_Q – себестоимость перевозки 1 т груза, к./т; ΣZ – сумма транспортных затрат, к.),

$$\beta = l_T / l_{об} = l_T / (l_T + l_x + l_0),$$

где l_T – пробег автомобиля с грузом, км; $l_{об}$ – общий пробег автомобиля, км; l_x – пробег автомобиля без груза во время работы на линии, км; l_0 – нулевой пробег, км.

133

Таким образом, Р шах, когда \wedge -♦ шах, + /о) min. Последнее условие с точки зрения организации транспортного процесса (выполнение заданного объема транспортной работы при минимуме затрат) определяет оптимальный вариант плана работы подвижного состава. Чтобы достигнуть этого, нужно спланировать рациональные маршруты движения подвижного состава, или, иначе говоря, провести маршрутизацию перевозок грузов.

Маршрутизация перевозок –

Это составление маршрутов движения подвижного состава или его порядка следования между корреспондирующими точками.

По одному маршруту могут перевозиться различные грузы, которые должны удовлетворять следующему условию: их можно транспортировать одним и тем же подвижным составом. Следовательно, маршрутизацию перевозок можно составлять только при наличии групп грузов, требующихся для перевозки однотипного подвижного состава. В связи с этим первый шаг работы по составлению рациональных маршрутов заключается в классификации грузов, предъявленных к перевозке, на группы, однородные с точки зрения возможности их перевозки на одном и том же подвижном составе.

Маршруты составляются по каждой группе грузов.

Практика постановки и решения задач маршрутизации перевозки грузов учитывает множество ограничений, вызываемых конкретными условиями работы грузовых точек и автомобильного транспорта. К ним относятся: заданное множество пунктов отправления и потребления груза, объемы грузооборота поставщиков и потребителей груза, характер грузов, время их доставки, структура и наличие парка подвижного состава, размещение и мощность автотранспортных предприятий, режим работы АТП и клиентуры, режим работы водителей, ограниченная пропускная способность пунктов, минимально допустимое значение целевой функции.

Многообразие ограничений в каждом конкретном случае потребовало создания различных методов маршрутизации, в том числе и эвристических, базирующихся на материалах опыта прошлых решений. Последние используются главным образом вычислительными центрами, обслуживающими автомобильный транспорт.

Большое число методов маршрутизации перевозки массовых грузов, когда грузы перевозятся помашинными отпавками, сложность используемых алгоритмов не позволяют в объеме данной книги привести их изложение. Читатель может познакомиться с ними в работе [5]. Ниже на конкретном примере рассматриваются только два относительно несложных метода маршрутизации, которыми можно пользоваться при расчетах вручную, когда имеется незначительная группа ограничений.

Моделирование транспортных процессов

Рассмотрим пример. Торговые организации Б₂, Б₃, Б₄, Б₅ могут получать овощи с трех складов: на складе А₁ - 100 т картофеля, 20 т

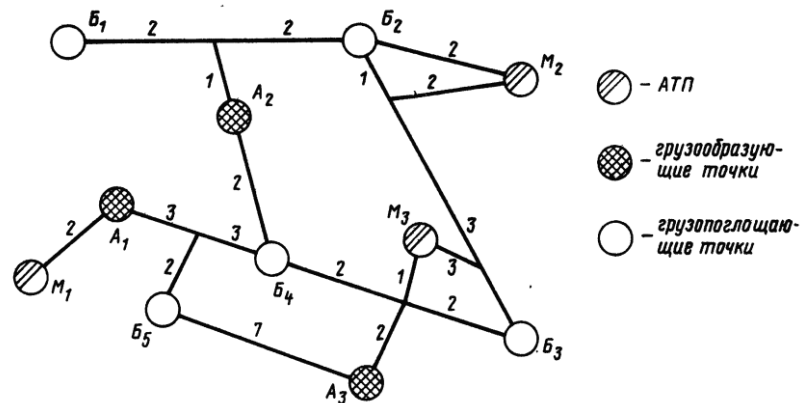


Рис. 5.5. Схема транспортной сети района перевозок овощей со складов в торговые организации

репчатого лука, 50 т капусты; на складе А₂ - 50 т картофеля, 100 т репчатого лука; на складе А₃ - 100 т картофеля, 150 т капусты.

Все три продукта являются грузами, перевозка которых может осуществляться одним и тем же подвижным составом. Имеющиеся на складах продукты требуются организациям в объемах, указанных в табл. 5.7.

Схема транспортной сети района перевозок показана на рис. 5.5.

Кратчайшие расстояния между корреспондирующимися точками в километрах указаны в табл. 5.8.

Требуется так организовать процесс перевозок, чтобы при минимальных затратах был перевезен весь груз и коэффициент использования пробега подвижного состава имел максимально возможную в данных условиях величину.

Таблица 5.7

Потребитель	Вид груза, т			Итого
	Картофель	Лук	Капуста	
Б ₁	50	20	50	120
Б ₂	60	30	40	130
Б ₃	40	25	70	135
Б ₄	80	25	20	125
Б ₅	20	20	20	60
Итого	250	120	200	570

135

Таблица 5.8

Склад	Потребитель груза				
	Б ₁	Б ₂	Б ₃	Б ₄	Б ₅
А ₁	11	11	10	6	5
А ₂	3	3	6	2	7
А ₃	9	9	4	4	7

Метод таблиц связей.

Как правило, грузообразующие и грузопоглощающие точки, род груза, объемы перевозок и расстояния доставки заданы условиями задачи. Перевозка

Моделирование транспортных процессов

овощей и картофеля может производиться одним и тем же видом подвижного состава (автомобиль ЗИЛ-130), следовательно, в этом отношении они образуют однородную группу.

Оптимальные размеры и направления грузопотоков определяют по каждому виду груза, затем составляют сводный план грузопотоков. При этом задачу решают любым из известных способов.

В рассматриваемом, примере необходимо решить три задачи прикрепления потребителей к поставщикам: по картофелю, репчатому луку и капусте. Рациональные грузопотоки определены по алгоритму транспортной задачи методом потенциалов.

Оптимальный план перевозки картофеля представлен в табл. 5.9.

Минимальный объем транспортной работы, которую следует выполнить при перевозке картофеля согласно оптимальному плану, равен $11 \cdot 50 + 11 \cdot 10 + 3 \cdot 50 + 4 \cdot 40 + 6 \cdot 20 + 5 \cdot 20 = 1430$ т·км.

Таблица 5.9

Овощная база	Потенциал строки	Потребитель					Объем перевозок, т
		B ₁	B ₂	B ₃	B ₄	B ₅	
		Потенциал столбца					
		11	11	6	6	5	
A ₁	0	<div>11</div> 50	<div>11</div> 10	<div>10</div>	<div>6</div> 20	<div>5</div> 20	100
A ₂	-8	<div>3</div>	<div>3</div> 50	<div>6</div>	<div>2</div>	<div>7</div>	50
A ₃	-2	<div>9</div>	<div>9</div>	<div>4</div> 40	<div>4</div> 60	<div>7</div>	100
Спрос, т		50	60	40	80	20	250

Таблица 5.10

Овощная база	Потенциал строки	Потребитель					Объем перевозок, т
		B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
		Потенциал столбца					
		1	1	4	0	5	
A_1	0	11	11	10	6	5	20
A_2	2	3	3	6	2	7	0
Спрос, т		20	30	25	25	20	120

Оптимальный план перевозки репчатого лука представлен в табл. 5.10.

Минимальный объем транспортной работы при перевозке лука составит $3 \cdot 20 + 3 \cdot 30 + 6 \cdot 25 + 5 \cdot 20 = 450$ т·км.

Оптимальный план перевозки капусты представлен в табл. 5.11.

Моделирование транспортных процессов

Минимальная транспортная работа, которую необходимо выполнить при перевозке капусты, составит $11 \cdot 30 + 9 \cdot 20 + 9 \cdot 40 + 4 \cdot 70 + 4 \cdot 20 + 5 \cdot 20 = 1330$ т·км.

Сводный план грузопотоков (табл. 5.12) является суммой оптимальных планов перевозок по каждому из видов груза (картофелю, луку и капусте). При этом объемы перевозок между одними и теми же корреспондирующими пунктами суммируют, сумма спроса по каждому потребителю должна соответствовать его общей потребности, а сумма

137

Таблица 5.11

Овощная база	Потенциал строки	Потребитель					Объем перевозок, т
		B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
		Потенциал столбца					
		11	11	6	6	5	
A_1	0	<div>11</div> 30	<div>11</div> 10	<div>10</div>	<div>6</div> 20	<div>5</div>	50
A_2	-2	<div>9</div> 20	<div>9</div> 40	<div>4</div> 70	<div>4</div> 20	<div>7</div> 20	150
Спрос, т		50	40	70	20	20	200

объемов перевозок должна соответствовать объему отправок овощных баз.

Сводный план характеризует прикрепление потребителей к овощным базам по всем видам грузов, предъявленных к перевозке, поэтому транспортная работа, которую необходимо выполнить согласно этому плану, должна равняться сумме транспортных работ по видам грузов

$$1430 + 450 + 1330 = 11 \cdot 80 + 3 \cdot 20 + 9 \cdot 20 + 11 \cdot 10 + 3 \cdot 80 + 9 \cdot 40 + 6 \cdot 25 + 4 \cdot 110 + 6 \cdot 20 + 2 \cdot 25 + 4 \cdot 80 + 5 \cdot 60 = 3210 \text{ т·км}$$

Отметим, что если в группе однородных по требованию к подвижному составу грузов встречаются грузы разного класса, то сводный план грузопотоков составляют в так называемых расчетных весах. Расчетную массу $Q_{\text{рас}}$ определяют делением объема перевозок в тоннах $Q_{\text{факт}}$ на средний коэффициент использования грузоподъемности для данного класса груза $V_{\text{ст}}$;

$$Q_{\text{рас}} = Q_{\text{факт}} / V_{\text{ст}}.$$

Расчетная масса является единым измерителем и соответствует общей номинальной грузоподъемности, необходимой для перевозки всего объема грузов, что позволяет без труда определить требуемое количество подвижного состава, а также количество ездов по каждому маршруту.

Оптимальный план подачи порожняка под погрузку определяют в результате решения транспортной задачи, в которой поставщиками являются пункты сосредоточения порожнего подвижного состава (потребители грузов), а его потребителями - объекты, испытывающие потребность в порожних автомобилях (овощные базы). В матрице задачи (табл. 5.13) первые показаны по строкам, вторые по столбцам*

Таблица 5.12

Моделирование транспортных процессов

Овощная база	Потребитель					Объем перевозок, т
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	80 11	10 11	10	20 6	60 5	170
A_2	20 3	80 3	25 6	25 2	7	150
A_3	20 9	40 9	110 4	80 4	7	250
Спрос, т	120	130	135	125	60	570

Таблица 5.13

Грузо-получатель	Потенциал строки	Грузоотправитель						Общая грузо-подъемность, т
		A ₁		A ₂		A ₃		
		Потенциал столбца						
		11		3		9		
B ₁	0	100	11	20	3		9	120
B ₂	0		11	130	3		9	130
B ₃	-5		10		6		4	135
B ₄	-5	10	6		2		4	125
B ₅	-6	60	5		7		7	60
Спрос на подвижной состав, т		170		150		250		570

Итоговые объемы перевозок остаются прежними и условно принимаются за общую грузоподъемность подвижного состава, прежними остаются и расстояния между пунктами.

Оптимальный план подачи порожняка под погрузку (см. табл. 5.13) получен в результате решения транспортной задачи методом потенциалов. Он обеспечивает минимальный пробег подвижного состава без груза при движении автомобилей от грузополучателей к грузоотправителям (овощным базам).

Согласно оптимальному «плану подачи порожняка необходимо, чтобы после выгрузки в пункте порожние автомобили грузоподъемностью 100 т были направлены на первую овощную базу (пункт A_1), а автомобили грузоподъемностью 20 т - на вторую овощную базу (пункт A_2). После выгрузки в пункте B_2 порожние автомобили общей грузоподъемностью 130 т должны возвращаться на вторую овощную базу; из пункта - автомобили общей грузоподъемностью 135 т на третью базу (пункт A_3), из пункта автомобили грузоподъемностью Ют- на первую и грузоподъемностью 115 т - на третью базу, из в\$ - порожние автомобили грузоподъемностью 60 т Должен подаваться на первую овощную базу.

Метод совмещенных матриц.

При этом методе подготовительный этап остается тот же, что и при методе таблиц связей, однако сводный план перевозки грузов и оптимальный план подачи порожнего подвижного состава заносят в единую матрицу (табл.5.14), т.е. таблицы 5.57 и 5. 8 совмещают (отсюда и название метода). При построении маршрутов весьма удобно, если числовые значения объемов перевозок и грузоподъемность порожних транспортных средств внешне отличаются друг от друга, например в совмещенной матрице их записывают разными способами или разными цветами.

Совмещенные планы предыдущей задачи представлены в матрице (см. табл. 5.14) В ней объемы перевозок обведены кружками, значения суммарной грузоподъемности не обведены, расстояния между пунктами указаны в верхних правых углах клеток матрицы.

На I этапе решения выявляют маятниковые маршруты. Наличие в клетке матрицы двух записей, грузоподъемности порожняка и объема перевозок, свидетельствует о наличии маятникового маршрута. Объем перевозок по маршруту соответствует меньшему из чисел клетки матрицы. Так, запись в клетке A_1B_1 (см. табл. 5.14) указывает на наличие маятникового маршрута $A_1B_1 - B_1A_1$ с объемом перевозок 80 т. Всего составлено семь маятниковых маршрутов, которые приведены ниже:

<i>Маятниковый маршрут</i>	<i>Объем перевозок по маршруту, т</i>
$A_1B_1 - B_1A_1$	80
$A_1B_4 - B_4A_1$	10
$A_1B_5 - B_5A_1$	60
$A_2B_1 - B_1A_2$	20
$A_2B_2 - B_2A_2$	80
$A_3B_3 - B_3A_3$	110
$A_3B_4 - B_4A_3$	80

Объемы перевозок по маятниковым маршрутам вычитают из загрузок соответствующих клеток; и составляют новую матрицу для продолжения решения задачи (см. табл. 5.1[^]). При решении практических задач используют одну матрицу, стирая старые и записывая новые числа непосредственно в таблице.

На II этапе составляют кольцевые маршруты. С этой целью строят замкнутые контуры. Вершины контура должны находиться в загруженных клетках матрицы, значения загрузок у вершин контура чередуются начиная с клетки, в которой помещен объем перевозок (число, обведенное кружком), затем грузоподъемность порожнего подвижного состава (необведенные числа), снова объем перевозок и так далее до получения замкнутого контура. Каждый построенный контур соответствует кольцевому маршруту. Объем перевозок по маршруту соответствует меньшему из чисел у вершин контура. В табл.

Таблица 5.14

Овощная база	Потребитель					Объем перевозок, т
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	11 (80) 100	11 (10)	10	6 (20) 10	5 (60) 60	170
A_2	3 (20) 20	3 (80) 130	6 (25)	2 (25)	7	150
A_3	9 (20)	9 (40)	4 (110) 135	4 (80) 115	7	250
Спрос, т	120	130	135	125	60	570

5.15 в качестве примера показан замкнутый контур, соответствующий кольцевому маршруту $A_1B_4 - B_4A_3 - A_3B_1 - B_1A_1$ с объемом перевозок Ют.

При построении замкнутого контура сплошная линия соответствует перевозке груза, пунктирная - подаче порожняка. В матрице сплошные линии расположены горизонтально, пунктирные - вертикально. Объем перевозок по маршруту вычитается из величины загрузок у вершин контура. Затем переходят к построению очередного маршрута и т.д. Построение рациональных маршрутов заканчивается, когда все объемы перевозок и грузоподъемность порожнего подвижного состава исчерпаны. Это должно происходить одновременно, в противном случае - допущена ошибка. Всего составлено 4 кольцевых маршрута (табл. 5.16).

Как видим, получены те же маршруты, что и при решении задачи методом таблиц связей. Однако метод совмещенных матриц менее трудоемок, позволяет в ходе разработки анализировать характеристики маршрутов и вносить необходимые изменения.

Таблица 5.15

Поставщик	Потребитель				
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	11 20	11 (10)	10	6 (10)	5
A_2	3	3 50	6 (25)	2 (25)	7
A_3	9 (20)	9 (40)	4 25	4 25	7

Таблица 5.16

Номер маршрута	Кольцевой маршрут	Объем перевозок, т	Коэффициент использования пробега
8	$A_1B_4 - B_4A_3 - A_3B_1 - B_1A_1$	10	$\frac{6+9}{6+9+4+11} = \frac{15}{30} = 0,50$
9	$A_1B_1 - B_2A_2 - A_2B_4 - B_4A_3 - A_3B_1 - B_1A_1$	10	$\frac{11+2+9}{11+3+2+4+9+11} = 0,55$
10	$A_2B_3 - B_3A_3 - A_3B_2 - B_2A_2$	25	$\frac{6+9}{6+4+9+3} = 0,682$
11	$A_2B_4 - B_4A_3 - A_3B_2 - B_2A_2$	15	$\frac{2+9}{2+4+9+3} = 0,611$

Выбор начального пункта маршрута.

Порожний пробег подвижного состава при перевозке грузов по рациональным маршрутам зависит от выбора начального пункта маршрута и автотранспортного предприятия, которое будет выделять подвижной состав для работы. На маятниковых маршрутах начало маршрута определено однозначно. На кольцевых - число возможных вариантов соответствует числу пунктов погрузки на маршруте.

К примеру проанализируем маршрут $A1\text{Щ} - i - B4A3 - Aг\text{Щ} - B^{\wedge}$.

На схеме маршрута движение без груза обозначено пунктиром и указано значение соответствующего пробега. Варианты сочетания пунктов первой погрузки и последней разгрузки и соответствующий им порожний пробег на последнем обороте маршрута приведены в табл. 5.17.

За начальный пункт маршрута рационально принять пункт $A\backslash$ (овощная база 1), так как при этом порожний пробег на последнем обороте по маршруту будет наименьшим, равным 7 км (исключается участок равный 11 км). Сокращается порожний пробег каждого автомобиля, работающего на маршруте.

В общем случае начальная точка кольцевого маршрута выбирается таким образом, чтобы при возврате подвижного состава в гараж на последнем обороте исключался самый длинный участок порожнего пробега по маршруту.

Таблица 5.17

Начало маршрута	Конец маршрута	Порожний пробег на последнем обороте по маршруту, км
A_1	B_1	7
A_2	B_2	15
A_3	B_4	14

142

Нулевой пробег подвижного состава будет минимальным при рациональном прикреплении маршрутов к автотранспортным предприятиям.

Критерием при этом является минимальный прирост порожнего пробега подвижного состава. Для маятниковых маршрутов этот прирост равен нулевому пробегу.

Порожний пробег подвижного состава на последнем обороте по кольцевому маршруту равен сумме порожних пробега на звеньях маршрута за вычетом участка, который не пройдет автомобиль, так как из последнего пункта разгрузки

Моделирование транспортных процессов

он возвращается в автотранспортное предприятие. С учетом нулевого пробега общий порожний пробег на последнем обороте по кольцевому маршруту равен:
где l_x — длина участка порожнего пробега по маршруту, который исключается на последнем обороте при возвращении подвижного состава в гараж, км; Ц - нулевой пробег подвижного состава в пункт первой погрузки и при возврате в гараж из пункта последней разгрузки, км.

Поскольку сумма порожних пробегов на звеньях маршрута, 12пор» остается всегда постоянной, то минимизация происходит за счет величины - l_x , которая характеризует прирост порожнего пробега на кольцевом маршруте. Для оптимального прикрепления рациональных маршрутов к автотранспортным предприятиям решается задача прикрепления потребителей к поставщикам методом потенциалов. Потребителями подвижного состава являются маршруты, его поставщиками - автотранспортные предприятия.

Условия такой задачи для рассматриваемого примера приведены в табл. 5.18.

Таблица 5.18

АТП	Маршрут											Наличие автомобилей, ед.
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	
M_1	15	10	9	23	23	24	20	$\frac{22}{A_1B_1}$	$\frac{19}{A_1B_1}$	$\frac{27}{A_3B_3}$	$\frac{23}{A_3B_4}$	9
M_2	19	20	25	11	7	16	17	$\frac{22}{A_1B_1}$	$\frac{23}{A_1B_1}$	$\frac{11}{A_2B_2}$	$\frac{11}{A_2B_2}$	4
M_3	17	12	17	13	12	6	6	$\frac{20}{A_3B_4}$	$\frac{17}{A_3B_4}$	$\frac{9}{A_3B_3}$	$\frac{9}{A_3B_4}$	5
Спрос на автомобили, ед.	3	1	2	1	2	3	2	1	1	1	1	18

143

Номера 11 рациональных маршрутов, которые получены в результате проведенной маршрутизации перевозок овощей, указаны в верхней строке табл. 5.18. Перевозку грузов осуществляют автотранспортные предприятия M_1 , M_2 , M_3 , которые выделяют соответственно 9, 4, 5 автомобилей. Потребность в подвижном составе на маршрутах, которая определена делением запланированного объема перевозок по маршруту на производительность одного автомобиля на этом маршруте, проставлена в последней строке таблицы. В клетках матрицы для маятниковых (1-7) маршрутов указан нулевой пробег, для кольцевых (8-11)-порожний пробег на последнем обороте по маршруту с учетом нулевых пробегов ($E_{\text{пор}} + l_0 - l_x$) и участок порожнего пробега, который исключается. Например, запись $22/A \setminus B \setminus$ в клетке M_1 , 8 означает, что при подаче автомобилей из автотранспортного предприятия M_1 на маршруте 8 общий порожний пробег на последнем обороте с учетом нулевых пробегов составит 22 км. При этом исключается звено порожнего пробега $A \setminus B \setminus$ т.е. маршрут следует начинать в пункте а затем заканчивать в $B \setminus$. Табл. 5.18 служит исходной матрицей при решении задачи.

Оптимальное прикрепление рациональных маршрутов к автотранспортным предприятиям, полученное в результате решения задачи методом потенциалов, показано в табл. 5.19.

Моделирование транспортных процессов

Автотранспортному предприятию M_1 рационально обслуживать маршруты 1, 2, 3, 4, 7, 8, 9; предприятию M_2 - маршруты 4, 5, 10; предприятию M_3 - 6, 7, 11. Маршрут 7 обслуживается двумя автотранспортными предприятиями: один автомобиль выделяет предприятие M_1 и один - предприятие M_3 . При этом порожний пробег на последнем обороте по кольцевым маршрутам и нулевой пробег всех автомобилей будут минимальными, 203 км в сутки:

15-3 + 10-1 + 9-2 + 20-1 + 22-1 + 19-1 + 11-1 + 1-2 + 11-1 + 6-3 + 6-1 + 9-1 - 203 км.

В окончательном виде рациональные маршруты записываются для каждого автотранспортного предприятия, которое будет выделять подвижной состав, и выбранной начальной точки маршрута (т.бл. 5.20).

Расчет потребного количества подвижного состава по маршрутам.

При закреплении маршрутов за АТП необходимо знать потребное количество подвижного состава на каждом маршруте. Такой расчет приведен в табл. 5.21. Символы, приведенные в таблице, обозначают:

$l_{об}$ - общая длина маршрута, км; $t_{пр}$ - простой под погрузкой-разгрузкой за одну езду, ч; n - количество ездов по маршруту за оборот; v - средняя техническая скорость движения, км/ч; $t_{об}$ - время одного оборота, ч; $T_{пл}$ - планируемое время пребывания подвижного состава на маршруте, ч; $A_{г}$ - целое число оборотов подвижного состава на маршруте, $N = T_{пл} / t_{об}$, при этом N - находится в пределах $1 < N < 0_{м/яу}$; $t_{ф}$ - фактическое время пребывания подвижного состава на маршруте, ч; $\Gamma_{ф} = t_{об} \cdot N$; Q_u - мощность грузопотока

144

Таблица 5.19

АТП	Потенциалы	Маршрут											Наличие автомобилей, ед.
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	
	столбца строки	15	10	9	23	19	20	20	22	19	23	23	
M_1	0	3	1	2				1	1	1			9
M_2	-12				1	2					1	0	4
M_3	-14						3	1				1	5
Спрос на автомобили, ед		3	1	2	1	2	3	2	1	1	1	1	18

Таблица 5.20

Моделирование транспортных процессов

Номер маршрута	Схема маршрута	Объем перевозок по маршруту, т	Число автомобилей на маршруте, ед.
1	$M_1 - A_1B_1 - B_1A_1$	80	3
2	$M_1 - A_1B_4 - B_4A_1$	10	1
3	$M_1 - A_1B_5 - B_5A_1$	60	2
4	$M_2 - A_2B_1 - B_1A_2$	20	1
5	$M_2 - A_2B_2 - B_2A_2$	80	2
6	$M_3 - A_3B_3 - B_3A_2$	110	3
7	$M_1 - A_3B_4 - B_4A_3$ $M_3 - A_3B_4 - B_4A_3$	80	1/1
8	$M_1 - A_1B_4 - B_4A_3 - A_3B_1 - B_1A_1$	10	1
9	$M_1 - A_1B_2 - B_2A_2 - A_2B_4 - B_4A_3 - A_3B_1 - B_1A_1$	10	1
10	$M_2 - A_2B_3 - B_3A_3 - A_3B_2 - B_2A_2$	25	1
11	$M_3 - A_3B_2 - B_2A_2 - A_2B_4 - B_4A_3$	15	1

145

Таблица 5.21

Номер маршрута	За ојо		ИН оборот			'об	Ом	2f N	1\A		Я	У	м	Последний автомобиль	
	'об	<п р	л	п<п р	V									N'	
1	22	0,5	1	0,5	80	1,23	80	6	7,0	7,38	5,0	1,0	2,7	4	4,92
2	12	0,5	1	0,5	30	0,90	10	2	7,0	1,80	5,0	1,0	1,0	2	1,80
3	10	0,5	1	0,5	30	0,83	10	8	7,0	6,64	5,0	1,0	1,5	4	3,32
4	(0,5	1	0,5	30	0,70	20	4	7,0	2,80	5,0	1,0	1,0	4	2,80
5	6	0,5	1	0,5	30	0,70	80	10	7,0	7,00	5,0	1,0	1,6	6	4,20
6	8	0,5	1	0,5	30	0,77	110	9	7,0	6,93	5,0	1,0	2,4	4	3,08
7	8	0,5	1	0,5	30	0,77	80	9	7,0	6,93	5,0	1,0	1,8	7	5,39
8	44	0,5	3	1,5	35	2,76	10	2	7,0	5,52	5,0	1,0	1,0	2	5,52
9	30	0,5	2	1,0	35	1,86	10	2	7,0	3,72	5,0	1,0	1,0	2	3,72
10	18	0,5	2	1,0	35	1,51	25	5	7,0	7,55	5,0	1,0	1,0	5	7,55
И	22	0,5	2	М	35	1,63	15	3	7,0	4,89		1,0	1,0	3	4,89

на маршруте, т; У - средний, коэффициент использования грузоподъемности подвижного состава; Q — средняя грузоподъемность единицы подвижного

Моделирование транспортных процессов

состава, $t_{\text{м}}$ — потребное количество единиц подвижного состава, $M = Q_{\text{м}}/q_{\text{у}}N$; N' — число оборотов последней единицы подвижного состава, $N' = Na$ где a — дробная часть количества единиц подвижного состава ($0 < a < 1$); $\Gamma_{\text{ф}}$ — фактическое время пребывания последней единицы подвижного состава на маршруте, ч , $T_{\text{ф}} = t_{\text{м}}N'$,

Расчёт пробегов подвижного состава по маршрутам. При выборе начального и конечного пунктов маршрута производится закрепление маршрутов за АТП путем решения задачи транспортного типа одним из известных методов, например методом потенциалов. Критерием оптимальности в данном случае является нулевой и непроизводительный пробег на последнем обороте движения автомобилей по маршрутам.

Для расчета показателей критерия оптимальности прежде всего необходимо знать расстояния между АТП и грузовыми точками (табл. 5.22).

Расчет пробегов подвижного состава по маршрутам приведен в табл. 5.23.

Таблица 5.22

АТП	Грузообразующие и грузопоглощающие точки							
		L_2	M		*2	*3	Ч	*5
M_X	2	10	12	13	13	12	8	7
Щ	13	\$	10	6	2	6	7	12
M_3	9	5	3	8	7	3	3	8

Таблица 5.23

Номер маршрута	Номер участка	Пробег с грузом за оборот, км			Непроизводительный пробег за оборот, км				l_{or}			$l'_x + l_{or}$		
		$A_j B_j$	$l_{тг}$	$\Sigma l_{тг}$	$B_j A_i$	l_{mr}	Σl_{xr}	l'_x	АТП					
									1	2	3	1	2	3
1	1	$A_1 B_1$	11	11	$B_1 A_1$	11	11	0	15	19	17	15	19	17
2	1	$A_1 B_4$	6	6	$B_4 A_1$	6	6	0	10	20	12	10	20	12
3	1	$A_1 B_5$	5	5	$B_5 A_1$	5	5	0	9	25	17	9	25	17
4	1	$A_2 B_1$	3	3	$B_1 A_2$	3	3	0	23	11	13	23	11	13
5	1	$A_2 B_2$	3	3	$B_2 A_2$	3	3	0	23	7	12	23	7	12
6	1	$A_3 B_3$	4	4	$B_3 A_3$	4	4	0	24	16	6	24	16	6
7	1	$A_3 B_4$	4	4	$B_4 A_3$	4	4	0	20	17	6	20	17	6
	1	$A_1 B_2$	11		$B_2 A_2$	3		15	23	7	12	38	22	27
8	2	$A_2 B_3$	6	26	$B_3 A_3$	4	18	14	24	16	6	38	30	20
	3	$A_3 B_1$	9		$B_1 A_1$	11		7	15	19	17	22	26	24
9	1	$A_1 B_4$	6	15	$B_4 A_3$	4	15	11	20	17	6	31	28	17
									15	19	17	19	23	21
10	1	$A_2 B_4$	2	11	$B_4 A_3$	4	7	3	20	17	6	23	20	9
	2	$A_3 B_2$				3		4	23	7	12	27	11	16
11	1	$A_2 B_3$	6	15	$B_3 A_3$	4	7	3	24	16	6	27	19	9
	2	$A_3 B_2$	9		$B_2 A_2$	3		4	23	7	12	27	11	16

Номер маршрута	Номер участка	Пробег с грузом за оборот, км			Непроизводительный пробег за оборот, км				'Сг					
		Щ	W	Чг				I	АТП					
									1	2	3	1	2	3
1	1		11	И	BxA _x	И	11	0	15	19	17	15	19	17
2	1	AxB _A	6	6	B*AI	6	6	0	10	20	12	10	20	12

Моделирование транспортных процессов

3	1	МВБ	5	5	BSAL	5	5	0	9	25	17	9	25	17
4	1	A&I	3	3	BXAG	3	3	0	23	И	13	23	И	13
5	1	AФ2	3	3	B3A 2	3	3	0	23	7	12	23	7	12
6	1	AФ%	4	4		4	4	0	24	16	6	24	16	6
7	1	A3B4	4	4	B4ДЗ '	4	4	0	20	17	6	20	17	6
		AФ7	И		B2Д2/	3		15	23	7	12	38	22	27
8		A&3	6	26	B3A3	4	18	14	24	16	6	38	30	20
	3	A3B1	9		B1A1	11		7	15	19	17	22	26	24
9	1	AxB _A	6	15	B4A3	4	15	11	20	17	6	31	28	17
									15	19	17	19	23	21
10	1	A& 4	2	11	B4A3	4		3	20	17	6	23	20	9
		A&2 .				3	#	4	23	7	12	27	И	16
11	1	AФ 3	6	15	B3A3	4	7	3	24	16	6	27	19	9
	2	A&2	9		B2A2	3		4	23	7	12	27	11	16

Таблица 5.24

АТП	Номер маршрута	Количество подвижного состава		Пункты маршрута		Последовательность прохождения пунктов маршрута	Мощность грузопотока, т	Число оборотов		Время работы маршрута		Примечание	
		расчетное	фактическое	начальный	конечный			N	N'	T _ф	T' _ф		
M ₁	1	2,7	3	A ₁	B ₁	A ₁ B ₁ B ₁ A ₁	80	6	4	7,38	4,92	+ № 2*	
	2	1,0	1	A ₁	B ₄	A ₁ B ₄ B ₄ A ₁	10	2	2	1,80	1,80	+ № 1	
	3	1,5	2	A ₁	B ₅	A ₁ B ₅ B ₅ A ₁	60	8	4	6,64	3,32	+ № 9	
	8	1,0	1	A ₁	B ₁	A ₁ B ₂ B ₂ A ₂ A ₂ B ₃ B ₃ A ₃ A ₃ B ₁ B ₁ A ₁	10	2	2	5,52	5,52	+ № 3	
	9	1,0	1	A ₁	B ₁	A ₁ B ₄ B ₄ A ₃ A ₃ B ₁ B ₁ A ₁	10	2	2	3,72	3,72		
	10	1,0	1	A ₃	B ₄	A ₃ B ₂ B ₂ A ₂ A ₂ B ₄ B ₄ A ₃	25	5	5	7,55	7,55		
M ₂						Итого требуется подвижного состава 9 – 2 = 7							
	4	1,0	1	A ₂	B ₁	A ₂ B ₁ B ₁ A ₂	20	4	4	2,80	2,80	+ № 5	
	5	1,6	2	A ₂	B ₂	A ₂ B ₂ B ₂ A ₂	80	10	6	7,00	4,20	+ № 4	
	11	1,0	1	A ₂	B ₂	A ₂ B ₃ B ₃ A ₃ A ₃ B ₂ B ₂ A ₂	15	3	3	4,89	4,89		
M ₃						Итого требуется подвижного состава 4 – 1 = 3							
	6	2,4	3	A ₃	B ₃	A ₃ B ₃ B ₃ A ₃	110	9	4	6,93	3,08	+ № 7	
	7	1,8	2	A ₃	B ₄	A ₃ B ₄ B ₄ A ₃	80	9	7	6,93	4,39	+ № 8	

Итого требуется подвижного состава 5 – 1 = 4

* + № 2 означает, что четыре оборота по этому маршруту может сделать автомобиль, не полностью занятый на маршруте № 2.

АТП	Номер маршрута	Количество подвижного состава		Пункты маршрута		Последовательность прохождения пунктов маршрута	Мощность грузопотока, т	Число оборотов		Время работы маршрута		Примечание
		расчетное	фактическое	начальный	конечный			N	N'	T _ф	T' _ф	

Моделирование транспортных процессов

М _х	1 2 3 8 9 ИГ	2,7 1,0 1,5 1,0 1,0 1,0	3 1 2 1 1 1	ч А ₃	h B _s B _i B _i B ₄	* B B М A\B ₄ B ₄ A\ A B ₅ B ₅ A Л ₁ B ₂ B ₂ D ₂ ^a 2 ^b 3 B [^] A [^] A [^] B [^] A1B4B4A3A3B1B 1A1 A [^] ₂ A ₂ A ₂ B _A B [^]	80 10 60 10 10 25	6 2 8 2 2 5 2 2 5	4 2 4 2 2 5	7,38 1,80 6,64 5,52 3,72 7,55	4,92 1,80 3,32 5,52 3,72 7,55	+ №2* + № 1 + №9 + №3
Щ	4 5 . 11	1,0 1,6 1,0	1 2 1	Аг А ₂	В _i В ₂ В _i	Итого требуется подвижного состава 9 — 2 «' A [^] _x B _x A ₂ a ⁷ b ⁷ 2 ^a 2	20 80 15	4 10 3 3	4 3	62,80 7,00 4,89	2,80 4,20 4,89	+ №5 + №4
щ	6 7	2,4 1,8	3 2		В% В _i	Итого требуется подвижного состава 4 — 1-3 A3B3B3A3 A3B4B4A з	110 80	9 9 7	4 7	6,93 6,93	3,08 4,39	+ №7 + №8

Итого требуется подвижного состава 5 — 1 = 4

* + № 2 означает, что четыре оборота по этому маршруту может сделать автомобиль, не полностью занятый на маршруте № 2.

расшифровка маршрутов. При определении рациональных маршрутов названия различных корреспондирующих точек, АТП, показателей записывают в зашифрованном виде. Для удобства чтения и реализации маршрутов эту запись расшифровывают. Расшифрованные маршруты и необходимые показатели записывают в маршрутную карту (табл. 5.24), откуда их переносят в маршрутные ведомости, а затем в путевые листы автомобилей, выделяемых для работ по этим маршрутам.

Анализ полученной карты позволяет определить оптимальные показатели работы минимально необходимого количества единиц подвижного состава.

Для перевозок 570 т груза при условиях, сформулированных в нашем примере, потребуется не менее 14 ед. подвижного состава грузоподъемностью 5 т. При этом минимально возможная транспортная работа будет равна 3210 т-км, пробег автомобилей с грузом - 642 км, общий пробег - 1284 км. Следовательно, математическая методика составления рациональных маршрутов дала возможность получить оптимальный коэффициент использования пробега, равный 0,5. Если же весь груз перевозить по маятниковым маршрутам, то коэффициент использования пробега снизится до 0,41.

Работа подвижного состава по рациональным маршрутам, составленным с помощью методов математического планирования, дает возможность сократить непроизводительный пробег до минимума и тем самым позволяет перевозить грузы с меньшими транспортными затратами.

Контрольные вопросы:

1. Актуальность решения задачи определения кратчайших расстояний между пунктами транспортной сети.
2. Структурный состав транспортной сети.
3. Что называется транспортной сетью?
4. Какая транспортная сеть считается заданной?
5. Способы определения расстояний между вершинами транспортной сети.
6. Характеристика метода потенциалов.

Моделирование транспортных процессов

7. Характеристика автоматизированного способа определения кратчайших расстояний между пунктами транспортной сети.
8. Характеристика метода таблиц связей.
9. Характеристика метода совмещенных матриц.
10. Методика выбора начального пункта маршрута.
11. Методика расчета потребного количества подвижного состава по маршрутам.
12. Методика расчета пробегов подвижного состава по маршрутам

Лекция 9. Методология решения задач маршрутизации подвижного состава

Вопросы лекции:

1. Составление рациональных маршрутов при помашинных перевозках грузов
2. Планирование маятниковых маршрутов

Вопрос 1. Составление рациональных маршрутов при помашинных перевозках грузов

Одной из важных задач оперативного планирования перевозок является составление маршрутов движения подвижного состава. Маршрутизацией перевозок называется составление рациональных маршрутов движения автомобилей, обеспечивающих сокращение непроизводительных холостых пробегов в целом по ПС. Задача составления рациональных маршрутов является особенно актуальной при перевозках массовых грузов.

При составлении маршрутов возможны два подхода к организации работы:

- за каждым поставщиком закрепляется группа автомобилей, которые работают по маятниковым маршрутам;
- автомобили не закрепляются за поставщиками, и маршрут может проходить через разные пункты погрузки и разгрузки, в этом случае возможно сокращение суммарного пробега автомобиля за счет использования рациональных кольцевых маршрутов.

193

Если количество поставщиков и потребителей незначительно, можно построить рациональный план перевозок без использования математических методов планирования. Но на практике, когда число потребителей и поставщиков очень велико, необходимо использование специальных методик для построения рациональных планов перевозок.

По одному маршруту могут перевозиться различные грузы, удовлетворяющие условию, при котором их можно транспортировать одним и тем же подвижным составом. Поэтому перед составлением маршрутов необходимо классифицировать грузы, предъявленные к перевозке, на группы, однородные с точки зрения возможности их перевозки на одном и том же подвижном составе. Маршруты составляют для каждой группы грузов отдельно.

Задачи маршрутизации делятся на задачи маршрутизации по- машинных отправок и задачи маршрутизации мелкопартионных перевозок.

Моделирование транспортных процессов

При помашинных перевозках каждый отдельный автомобиль загружается в адрес только одного потребителя. При мелкопартионных перевозках автомобиль загружается и (или) разгружается постепенно по мере движения по маршруту.

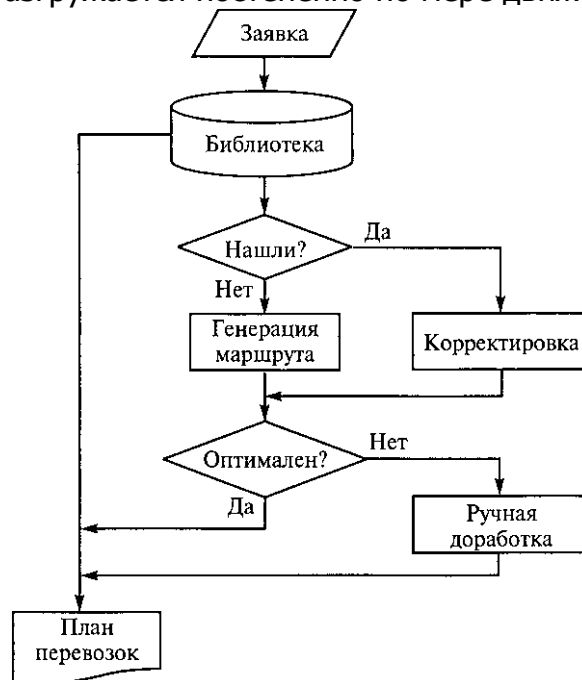


Рис. 8.5. Алгоритм планирования оптимального маршрута

194

Сложность задач маршрутизации заключается, как правило, в их большой размерности и множестве ограничений, которые могут динамически меняться. В связи с тем, что перевозчик чаще всего обслуживает постоянных клиентов на определенной территории, при решении задачи маршрутизации сначала пытаются воспользоваться ранее рассчитанными маршрутами. Для этого создаются библиотеки маршрутов, и определение оптимального маршрута производится по алгоритму, представленному на рис. 8.5.

Составление рациональных маршрутов при помашинных перевозках грузов

Пусть заданы пункты производства груза (ГОП) и пункты потребления груза (ГПП), пункт размещения автомобилей (АТО), а также расстояния между этими пунктами. Известны заявки на перевозки (груженные ездки) и количество груза, которое необходимо перевезти от конкретного ГОП к заданному ГПП. Пример исходных данных представлен в табл. 8.2.

Требуется так организовать процесс перевозок, чтобы был перевезен весь груз и при этом суммарный пробег автомобилей без груза был бы минимальным.

Задача составления рациональных маршрутов при помашинных перевозках может решаться как транспортная задача или как общая задача линейного программирования.

При решении этой задачи как транспортной на основе заданного плана перевозок (см. табл. 8.2) считаются известными ездки с грузом. Суммарный пробег автомобилей может быть снижен за

Таблица 8.2

Моделирование транспортных процессов

Задание на перевозки по кольцевому маршруту

ГОП	ГПП	Количество груза, т	Вид груза	Количество ездов
А	Вг	22,5	Песок	5
Л ₂	В ₂	15,5	Уголь	3
А ₂	В ₃	9	Уголь	2
А ₂	В ₄	22	Уголь	5
А ₃	В [^]	5	Опилки	2
А ₃	В ₃	9	Опилки	4
Л ₄	В ₂	13,5	Щебень	3
А ₄	В ₄	21	Щебень	5
А ₄	В _ь	27	Щебень	6

195

счет рационального планирования движения автомобилей без груза. Определение потоков движения автомобилей без груза сводится к решению транспортной задачи, в которой ГПП рассматриваются как отправители, а ГОП как потребители АТС, готовых к дальнейшей перевозке грузов. Для составления плана выполнения холостых ездов используется метод таблиц связей или более простой метод совмещенных матриц.

При решении задачи составления рациональных маршрутов при помашинных перевозках как общей задачи линейного программирования исходные данные представляются как множество допустимых маршрутов. Решение состоит из двух этапов:

- формирование технологически допустимых маршрутов;
- выбор оптимального набора маршрутов.

При составлении рациональных маршрутов должны учитываться следующие ограничения:

число ездов, включаемое в один оборот (звенность маршрута), как правило, не должно превышать четырех, поскольку большая звенность ведет к большей вероятности сбоев;

предельная продолжительность рабочей смены водителя;

наименьшее допустимое значение коэффициента использования пробега, определяемое по минимально допустимой эффективности перевозок.

Для перевозки всех грузов выбирается одна модель ПС. При этом должно обеспечиваться соответствие размеров кузова размерам груза и максимальное использование грузоподъемности подвижного состава.

Коэффициент использования грузоподъемности для каждого вида груза рассчитывается отдельно. Для опилок и угля коэффициент использования грузоподъемности автомобиля γ примем 0,5, для щебня — 1,0.

Будем осуществлять перевозки на самосвалах ЗИЛ-4503. Грузоподъемность этого автомобиля составляет 4,5 т. Посчитаем количество ездов, которые необходимо сделать от каждого поставщика к потребителю. Количество ездов определяется по формуле

$$n_e = \sum Q_{гij} / \gamma q_n,$$

где $\sum Q_{гij}$ — общее количество груза, которое необходимо перевезти от каждого поставщика к каждому потребителю.

Моделирование транспортных процессов

Результаты расчета количества ездов, которые необходимо сделать от каждого из поставщиков к потребителям, приведены в табл. 8.2.

Для решения задачи маршрутизации используем метод совмещенных матриц.

Представим исходные данные в виде таблицы (табл. 8.3). Расстояние между пунктами будем записывать в правый верхний угол

196

Таблица 8.17

Исходная матрица для составления кольцевых маршрутов

ГОП	ГПП					Итого по вывозу, т
	B_1 (25)	B_2 (10)	B_3 (9)	B_4 (5)	B_5 (8)	
A_1 (5)	40	36 (5)	67	61	73	5
A_2 (7)	10	64	37	39 (10)	69	10
A_3 (7)	38	36 (6)	56	45 (0)	73	6
A_4 (5)	6 (2)	78	23 (6)	45 (0)	65 (6)	14
Итого по ввозу, т	2	11	6	10	6	

ячейки матрицы. Расстояние от АТО до ГОП и ГПП запишем в скобках рядом с обозначением пункта. Занесем в таблицу суммарное количество ездов для каждого поставщика и потребителя.

Решим задачу составления оптимального плана подачи порожнего подвижного состава под загрузку при помощи метода, описанного в п. 8.4. Полученный план холостых ездов обеспечивает минимальный пробег подвижного состава без груза при движении автомобилей от грузоотправителя к грузополучателю.

Результаты решения также занесем в табл. 8.3 (холостые ездки будем обозначать числом в круглых скобках). Таким образом получается матрица холостых ездов.

Занесем в матрицу груженные ездки, которые необходимо выполнить согласно поставленной задаче. Груженные ездки будем заносить в матрицу в виде числа, выделенного полужирным шрифтом (табл. 8.4).

Таким образом, получается совмещенная матрица холостых и груженных ездов (см. табл. 8.4), отсюда и название метода. С помощью этой матрицы будем формировать маршруты движения АТС.

На первом этапе выявляем маятниковые маршруты. Наличие в одной ячейке таблицы холостых и груженных ездов свидетельствует о необходимости использования маятникового маршрута. Количество ездов в маятниковом маршруте будет равно минимальному из значений количества груженных ездов и количества холостых ездов.

В нашем примере можно сформировать следующие маятниковые маршруты:

197

Моделирование транспортных процессов

Таблица 8.4 Совмещенная матрица холостых и груженых ездов

ГОП	ГПП					Итого по вывозу, т
	B_1 (25)	B_2 (10)	B_3 (9)	B_4 (5)	B_5 (8)	
A_1 (5)	40	36 5 (5)	67	61	73	5
A_2 (7)	10	64 3	37 2	39 5 (10)	69	10
A_3 (7)	38 2	36 (6)	56 4	45 (0)	73	6
A_4 (5)	6 (2)	78 3	23 (6)	45 5 (0)	65 6 (6)	14
Итого по ввозу, т	2	11	6	10	6	

- маршрут 1: $A_x — B_2 — A_x — 5$ оборотов;
- маршрут 2: $A_2 — B_4 — A_2 — 5$ оборотов;
- маршрут 3: $A_4 — B_5 — A_4 — 6$ оборотов.

Объемы перевозок по маятниковым маршрутам вычитают из загрузок соответствующих клеток и составляют новую матрицу для продолжения решения задачи (табл. 8.5).

На втором этапе составляют кольцевые маршруты. С этой целью строят замкнутые контуры. Вершины контура должны находиться в загруженных ячейках матрицы, при этом значения загрузок в вершинах контура должны чередоваться: сначала идет ячейка, содержащая груженые ездки, затем ячейка, содержащая холостые ездки, и т.д.

Каждый построенный контур соответствует кольцевому маршруту. Количество ездов на маршруте соответствует наименьшему из числа холостых и груженых ездов по вершинам контура.

Например, построим контур $A_3B_1 — A_3B_2 — A_2B_2 — A_2B_4 — A_4B_4 — A_4B_1 — A_3B_1$. В матрице сплошные линии расположены горизонтально и соответствуют перевозке груза. Пунктирные линии, расположенные вертикально, соответствуют подаче порожнего подвижного состава. Минимальная загрузка по этому контуру составляет две ездки. Строим кольцевой маршрут:

маршрут 4: $A_3 — B_1 — A_4 — B_4 — A_2 — B_2 — A_3 — 2$ оборота.

Таблица 8.5

Матрица для составления кольцевых маршрутов

ГОП	ГПП					Итого по вывозу, т
	$B_1(25)$	$B_2(10)$	$B_3(9)$	$B_4(5)$	$B_5(8)$	
$A_1(5)$	40	36	67	61	73	5
$A_2(7)$	10	3	64	37	39	69
			2	(5)		10
$A_3(7)$	38	36	56	45	73	6
	2	(6)	4			
$A_4(5)$	6	78	23	45	65	14
	(2)	3	(6)	5		
Итого по ввозу, т	2	11	6	10	6	

Общий пробег подвижного состава при перевозке грузов по рациональным маршрутам зависит от выбора начального пункта маршрута. На маятниковых маршрутах начальный пункт определен однозначно пунктом погрузки. На кольцевых маршрутах число возможных вариантов начального пункта соответствует числу пунктов погрузки на маршруте.

Поэтому для определения начального пункта кольцевого маршрута необходимо рассмотреть все возможные сочетания пунктов первой погрузки и пунктов последней разгрузки. Для каждого варианта надо просчитать суммарный порожний пробег от АТО до пункта первой загрузки и от пункта последней разгрузки до АТО.

За начальный пункт погрузки целесообразно принять тот пункт, при котором суммарный пробег минимален. Таким образом, сокращается пробег каждого автомобиля, работающего на маршруте.

Для маршрута 4 возможно три варианта начального пункта:

- начало в пункте A_3 , конец в пункте B_5 нулевой пробег 17 км;
- начало в пункте A_5 конец в пункте B_4 , нулевой пробег 12 км;
- начало в пункте A_4 , конец в пункте B_5 нулевой пробег 30 км.

Таким образом, целесообразно в качестве начального пункта на кольцевом маршруте 4 принять пункт A_5 маршрут при этом будет заканчиваться в пункте B_4 . Суммарный нулевой пробег от АТО до пункта первой загрузки A_2 и от пункта последней разгрузки B_4 до АТО будет минимально возможным для данного маршрута и составит 12 км.

199

Количество ездов, включенное в этот маршрут, вычитается из загрузки в вершинах контура. Затем переходят к построению следующего кольцевого маршрута.

Построим следующий контур: $A_4B_2-A_3B_2-A_3B_3-A_4B_3-A_4B_2$. Для этого маршрута возможно два варианта выбора начального пункта:

- начало в пункте A_4 , конец в пункте B_3 , нулевой пробег 14 км;
- начало в пункте A_3 , конец в пункте B_5 нулевой пробег 17 км. За начальный пункт маршрута принимаем пункт A_4 . По этому

Моделирование транспортных процессов

контур организации следующий маршрут: маршрут 5: $A_4 \rightarrow B_2 \rightarrow A_3 \rightarrow B_3 \rightarrow A_4 \rightarrow 3$ оборота.

Вычитаем количество ездов, включенных в маршрут, из загрузки соответствующих клеток и выбираем следующий кольцевой маршрут по контуру: $A_3B_3 \rightarrow A_3B_2 \rightarrow A_2B_2 \rightarrow A_2B_4 \rightarrow A_4B_4 \rightarrow A_4B_3 \rightarrow A_3B_3$.

Для этого маршрута возможно три варианта выбора начального пункта:

- начало в пункте A_2 конец в пункте B_4 , нулевой пробег 12 км;
- начало в пункте A_{4j} конец в пункте B_3 , нулевой пробег 14 км;
- начало в пункте L_3 , конец в пункте B_4 , нулевой пробег 17 км. За начальный пункт данного маршрута принимаем пункт A_2 и по этому контуру задаем следующий маршрут:

маршрут 6: $A_2 \rightarrow B_2 \rightarrow A_3 \rightarrow B_3 \rightarrow A_4 \rightarrow B_4 \rightarrow A_2 \rightarrow 1$ оборот. Последний контур $A_2B_3 \rightarrow A_2B_4 \rightarrow A_4B_4 \rightarrow A_4B_3 \rightarrow A_2B_3$. Для этого маршрута возможно два варианта выбора начального пункта:

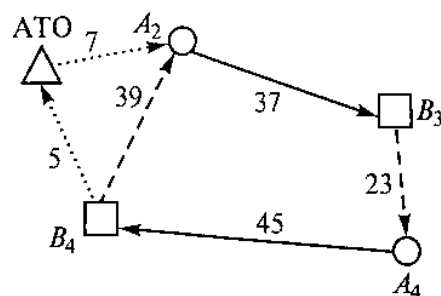
- начало в пункте A_2 конец в пункте B_4 , нулевой пробег 12 км;
- начало в пункте A_4 , конец в пункте B_3 , нулевой пробег 14 км. За начальный пункт данного маршрута принимаем пункт A_2 и

строим маршрут 1\ $A_2 \rightarrow B_3 \rightarrow A_4 \rightarrow B_4 \rightarrow A_2 \rightarrow 2$ оборота. Таким образом, построен план перевозок. Метод совмещенных матриц, в отличие от остальных методов маршрутизации, является менее трудоемким методом и позволяет в ходе разработки анализировать характеристики маршрутов и вносить необходимые изменения.

Для предупреждения ошибок при составлении маршрутного листа необходимо на основе транспортной сети составить схему каждого маршрута, как это показано для маршрута 7 на рис. 8.6.

На каждый автомобиль заполняется маршрутный лист, на основании которого готовится путевая документация, для чего необходимо рассчитать технико-эксплуатационные показатели работы. Выполним их расчет для маршрута 7.

200



— Пробег с грузом
 - - - - - Холостой пробег
 Нулевой пробег

Рис. 8.6. Схема маршрута 7

Время одного оборота (см. табл. 3.1):

$$t_o = l_m / v_t + t_{п-р} = 144 / 49 + (2 \cdot 4,5 \cdot 1 + 2 \cdot 4,5 \cdot 0,5 \cdot 1) / 60 = 3 + 0,22 = 3,22 \text{ ч.}$$

Время работы на маршруте (см. (3.4))

$$T_m = T_n - l_n / v_t = 10 - 12 / 49 = 9,75 \text{ ч.}$$

Возможное число оборотов, которое может выполнить один автомобиль:

Моделирование транспортных процессов

$$n_o = INT(T_m/t_o) = INT(9,75/3,22) = 3 \text{ оборота.}$$

По этому маршруту необходимо выполнить всего 2 оборота, таким образом, выделенный автомобиль имеет резерв свободного времени

$$T_p = T_m - 2t_o + t_3 = 9,75 - 2 \cdot 3,22 + 39/49 = 4,11 \text{ ч,}$$

здесь t_3 — время движения от B_4 до A_2 , которое не выполняется на последнем, втором обороте.

Резерв свободного времени необходимо фиксировать и после завершения расчета технико-эксплуатационных показателей для всех маршрутов использовать для планирования работы на других маршрутах.

В данном случае после завершения работы на маршруте 7 наиболее целесообразно будет задействовать автомобиль для работы на маятниковом маршруте 2.

Время оборота по этому маршруту (см. табл. 3.1)

$$t_o = 2l_{e.g}/v_T + t_{п-р} = 2 \cdot 39/49 + 2 \cdot 4,5 \cdot 0,5 \cdot 1/60 = 1,6 + 0,07 = 1,67 \text{ ч.}$$

Количество оборотов

$$n_o = INT((T_p - t_{под})/t_o) = INT((4,11 - 39/49)/1,67) = \\ = INT(1,95) = 1 \text{ оборот,}$$

здесь $t_{под}$ — время подъезда для переезда с точки завершения работы на маршруте 7.

Пример маршрутного листа для автомобиля, работающего на маршрутах 7 и 2, приведен в табл. 8.6.

При расчете времени следует производить разумное округление получаемых значений в большую сторону, что обеспечивает необходимый резерв на случай задержек в пути и при выполнении по-грузочно-разгрузочных работ. Расчет времени, как это видно из табл. 8.6, показал, что по маршруту 2 автомобиль реально может выполнить только один оборот. Это обеспечивает возврат автомобиля в АТО до 19:00 — времени окончания рабочей смены водителя.

Коэффициент использования пробега для этого автомобиля составит (см. (3.3))

201

Таблица 8.6

Маршрутный лист

Пункт отправления	Время отправления	Пункт назначения	Время прибытия	Наименование груза	/г, км	/х, км	пс	Q, т
АТО	8:00	л ₂	8:10	—	—	7	1	—
л ₂	8:20, 13:30	В ₃	9:30, 14:40	Уголь	37	—	2	4,5
В _ъ	9:40, 14:50	А ₄	10:10, 15:20	—	—	23	2	—
а ₄	10:20, 15:30	В ₄	11:20, 16:30	Щебень	45	—	2	9
В ₄	11:30, 16:40	Л ₂	12:20, 17:30	—	—	39	2	—
Обед	12:20		13:20	—	—	—	—	
л ₂	17:40	В ₄	18:30	Уголь	39		1	2,25
В ₄	18:40	АТО	18:50	—	—	5	1	—
Итого					203	136		15,75

$$P = \gamma / (\gamma + 4) = 203 / (203 + 136) = 0,6.$$

Часовая производительность

$$U_4 = Q / T_{\text{и}} = 15,75 / 9,75 = 1,61 \text{ т/ч.}$$

Вопрос 2. Планирование маятниковых маршрутов

Несмотря на высокую привлекательность кольцевых маршрутов практика показывает, что по кольцевым маршрутам можно перевезти не более 20 % грузов. Поэтому важной задачей является рациональное планирование перевозок по маятниковым маршрутам.

При составлении маятникового маршрута проблема выбора возникает только при планировании груженых ездов, так как возврат ПС происходит в одну точку.

На планирование маятниковых маршрутов оказывают влияние следующие факторы:

- особенности перевозок могут включать требования по обязательной доставке определенных грузов, и продолжительность рейсов до различных ГПП может существенно отличаться;
- ресурсы АТО накладывают ограничения на продолжительность работы ПС; при этом используемые АТС могут иметь различную грузоподъемность;
- динамически изменяющиеся факторы определяют занятость фронта выполнения ПРР и время доставки груза.

202

Каждый раз, когда порожний ПС возвращается от грузополучателя и его сменное время не исчерпано, требуется назначить очередную груженую езду. Если разные ездки существенно различаются по времени выполнения, то выбор ездки окажет определяющее влияние на продолжение работы АТС. В противном случае важным является лишь наиболее полная загрузка ПС.

Рассмотрим задачу, в которой необходимо разработать план развоза грузов потребителям с терминала однородным подвижным составом.

Необходимо построить оптимальную систему маршрутов, позволяющую выполнить задания на перевозки минимальным числом автомобилей, при этом время работы на каждом маршруте не должно превышать времени пребывания ПС в наряде.

Допустим, что имеется четыре потребителя, показатели обслуживания которых приведены в табл. 8.7 (количество ездов — я,-; время оборота ПС — Время пребывания в наряде не должно превышать 480 мин.

Следовательно, необходимо выполнить 10 ездов продолжительностью 120, 120, 222, 222, 240, 240, 180, 180, 180 и 180 мин соответственно. Пронумеруем их в приведенной последовательности. Общая продолжительность ездов 1884 мин, таким образом, как минимум потребуется $1884 / 480 = 3,93 = 4$ автомобиля. Оценкой сверху можно считать 10 автомобилей, по одному для выполнения каждой ездки.

Для выполнения задания минимальным числом автомобилей необходимо добиться минимальных потерь времени. Это можно сделать, проверяя различные последовательности выполнения ездов. Сначала оговорим недопустимые случаи формирования последовательности ездов исходя из условия задачи и стремления сократить общее число возможных вариантов перебора:

- превышено время в наряде (случай 1);
- ездка с большим номером предшествует езде с меньшим номером (случай 2);

Моделирование транспортных процессов

- на уровне решения задачи с большим номером принята ездка, предшествовавшая езде, принятой на уровне с меньшим номером, — это позволяет на последующих уровнях решения зада-

Таблица 8.7

Исходные данные для планирования **маятниковых** маршрутов

Показатели	Потребители			
	1	2	3	4
Щ	2	2	2	4
//, мин	120	222	240	180

203

чи исключить из рассмотрения ранее принятые к включению в план ездки (случай 3);

- если план на некотором уровне решения задачи имеет в своем составе ездку и в списке свободных ездов есть ездка с таким же номером (случай 4);
- если план позволяет в оставшееся время выполнить еще хоть какую-либо ездку — неполный план (случай 5);
- если общее время выполнения всех оставшихся ездов начинает превышать общее время в наряде оставшихся свободными автомобилями — отрицательный запас времени (случай 6).

Значительное сокращение перебора может быть получено, если имеются ездки с одинаковым временем выполнения. Целесообразно таким езткам присваивать одинаковый номер и использовать этот номер в совокупности планов, составляя распределение ездов столько раз, сколько ездов имеют данную продолжительность.

Отдельная итерация состоит из последовательности шагов. Выполнение одного шага относится к некоторому уровню и определяет переход к следующему или предыдущему уровню. Число уровней соответствует числу автомобилей. К началу каждого шага имеется список свободных ездов и определяемый им неотрицательный запас времени.

Допустим, что сделано несколько шагов, последний из которых определил переход на уровень k . Это значит, что для $k - 1$ автомобилей выбраны некоторые допустимые планы последовательностей ездов.

Считая, что езткам одинаковой продолжительности присваивается один номер, имеем по две ездки с номерами 1, 2, 3 и четыре ездки с номером 4. Запас времени составляет $t_3 = 4 \cdot 480 - 1884 = 36$ мин.

Последовательность выполнения расчетов приведена в табл. 8.8.

Первым проверяемым планом для первого уровня является включение в него ездки 1, но такой план не является полным. Следующим вариантом является включение двух ездов под номером 1, но и он неполный. Далее следует вариант 1, 1, 2 — он является полным, так как резерв времени составляет 18 мин, что не превосходит общего запаса — 36 мин. Для первого автомобиля план составлен, переходим ко второму шагу. Запас составляет $36 - 18 = 18$ мин.

Второй шаг относится ко второму уровню. Из списка свободных ездов исчезли обе первые и одна вторая ездки. На втором шаге аналогично определяется (как будто решается новая задача) допустимый план ездов (2, 3). Его резерв равен 18 мин, поэтому для третьего шага, относящегося к третьему уровню, запас времени будет равен 0. Список свободных ездов — 3, 4, 4, 4, 4. Первым полным планом

Моделирование транспортных процессов

будет являться 3, 4, но его резерв времени 60 мин, что превышает запас (в этом случае все задание заведомо

204

Таблица 8.8

Результаты расчетов

Шаг	Запас времени, мин	Уро- вень	Число свободных ездов по номерам				Провер- ка	План выполне- ния ездов	Время выполнени- я плана, мин	Остаток времени, мин	Примечание
			1	2	3	4					
1	36	1	2	2	2	4	1	1	120	360	Случай 5
							2	1, 1	120+ 120	240	Случай 5
							3	1,1,2	120+120 +222	18	Принимаетс- я (автомобил- ь 1)
2	18	2	0	1	2	4	1	2	222	258	Случай 5
							2	2,3	222 + 240	18	Принимаетс- я (автомобил- ь 2)
3	0	3	0	0	1	4	1	3	240	240	Случай 5
							2	3,4	240+ 180	60	Случай 6
							3	4	180		Случай 4 Л
4	18	2	0	1	2	4	1	2,4	222 + 180	78	Случай 6
							2	3	240		Случай 4 ft
5	36	1	2	2	2	4	1	1, 1,3	120+120 +240	0	Принимаетс- я (автомобил- ь 1)
6	36	2	0	2	1	4	1	2	222	258	Случай 5
							2	2,2	222 + 222	36	Принимаетс- я (автомобил- ь 2)
7	0	3	0	0	1	4	1	3	240	240	Случай 5

Окончание табл. 8.8

Шаг	Зап- ас времен- и, мин	Уровен- ь	Число свободных ездов по номерам				Провер- ка	План выполнен- ия	Время выполнения плана, мин	Остаток времен- и, мин	Примеча- ние
			1	2	3	4		ездов			
7	0	3	0	0	1	4	2	3,4	240+180	60	Случай 6
							3	4	180		Случай 4 Л
8	36	2	0	2	1	4	1	2,3	222 + 240	18	Принима- ется (автомоб- иль 2)

Моделирование транспортных процессов

9	18	3	0	1	0	4	1	2,4	222 + 180	78	Случай 6 Л
10	36	2	0	2	1	4	1	2,4	222 + 180	78	Случай 6 ft
11	36	1	2	2	2	4	1	1, 1,4	120+120+ 180	60	Случай 6
							2	1,2	120+222	138	Случай 5
							3	1, 3	120 + 240	120	Случай 5
							4	1,4	120+180	180	Случай 5
							5	1,4,4	120+180+18 0	0	Принима ется (автомоб иль 1)
12	36	2	1	2	2	2	1	1,4,4	120+180+ 180	0	Принима ется (автомоб иль 2)
13	36	3	0	2	2	0	1	2	222	258	Случай 5
							2	2,2	222 + 222	36	Принима ется (автомоб иль 3)
14	0	4	0	0	2	0	1	3,3	240 + 240	0	Принима ется (автомоб иль 4)

Примечание. Стрелка означает возврат на предыдущий уровень.

Таблица 8.17

План выполнения ездки

Автомобили	Число ездки до получателя груза				Время выполнения плана, мин
	1	2	3	4	
1	1			2	480
2	1			2	480
3		2			444
4			2		480

не будет выполнено четырьмя автомобилями). Если бы в списке свободных ездки была ездка с номером 5, следующий план был бы 3, 5. Поскольку такой ездки нет, следующий план — 4. Кроме того что этот последний план неполный, он оставляет в списке свободных ездки ездку с номером 3, меньшим, чем номер ездки, которая включена в него первой. Бессмысленно перебирать варианты дальше, сохраняя планы на предыдущих уровнях. Надо вернуться к предыдущему (второму) уровню и проверить для него следующие варианты.

Таким образом, четвертый шаг будет относиться ко второму уровню. Вместо принятого ранее на этом уровне плана 2, 3 надо будет найти следующий за ним допустимый план. Такой план будет включать ездки с номерами 2, 4, поскольку пополнять план 2, 3 не имеет смысла — он уже был принят раньше, значит, он

Моделирование транспортных процессов

полный. План 2, 4 тоже полный, но он имеет большой резерв времени ($78 > 18$). Он недопустим.

Следующим является план 3, но он оставляет свободной езду 2. Этот случай уже рассмотрен, значит, необходимо переходить к следующему шагу, который возвращает нас на первый уровень к первоначальным параметрам.

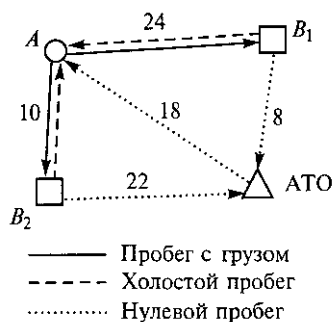
План может быть выполнен четырьмя автомобилями. Последовательность выполнения езды приведена в табл. 8.9.

Сокращение нулевых пробегов при использовании маятниковых маршрутов. Рассмотрим возможность сокращения нулевых пробегов при планировании перевозок по маятниковым маршрутам на примере. Схема выполнения перевозок представлена на рис. 8.7.

Допустим, что в течение смены необходимо из пункта А в пункт В_х

Рис. 8.7. Схема перевозок

207



сделать 12 езды, а в пункт В₂ — 50 езды. Известно, что по маршруту А — В_х можно выполнить 3 оборота и по маршруту А — В₂ — 5 оборотов.

Составим первый план перевозок, исходя из выделения определенного количества АТС на каждый маршрут.

На маршрут А — В_х необходимо направить $A_m = 12/3 = 4$ автомобиля. Непроизводительный пробег всех АТС по этому маршруту составит $L_{A-B_x} = A_m(l_x + l_{\text{н}}) = 4(24-2 + 18 + 8) = 296$ км.

На маршрут А — В₂ необходимо направить $A_m = 10$ автомобилей. Непроизводительный пробег всех АТС по этому маршруту составит $L_{A-B_2} = 10(10-4 + 18 + 22) = 800$ км.

Таким образом, при работе по этому плану 14 автомобилей проедут 788 км с грузом и 1096 км без груза. Коэффициент использования пробега согласно (3.3) составит

$$P = 788 / (1096 + 788) = 0,42.$$

Теперь попытаемся найти оптимальный план выполнения этих перевозок, представив задачу как задачу линейного программирования. Будем рассматривать ГПП как поставщиков порожних езды, а ГОП и АТО как их получателей. Тогда условие задачи можно записать в виде матрицы (табл. 8.10).

Решаем транспортную задачу с целью получить оптимальный план выполнения порожних езды. Полученное распределение езды показывает, что в АТО из В_х должно вернуться 12 автомобилей и 2 автомобиля из В₂. Все порожние езды целесообразно выполнять в пункте В₂. Для достижения этого 12 автомобилей должны работать по маршруту А—В₂В₁, выполнив по нему по 4 оборота, последнюю езду совершить в пункте В₂ оттуда вернуться в АТО. По маршруту А — В₁ будут выполнены все необходимые езды,

Таблица 8.10

Матрица планирования маятниковых маршрутов

Моделирование транспортных процессов

ГПП	Потенциалы	ГОП (А)	АТО	n_c
		0	12	
B_1	-4	-4 24	12 8	12
B_2	10	48 10	2 22	50
Итого		$62 - 14 = 48$	14	62

208

а по маршруту А — B_2 останется выполнить $p_0 = 50 - 12 - 4 = 2$ оборота. Для этого придется использовать еще один автомобиль. Суммарный непроизводительный пробег всех АТС по второму плану составит

$L = 12(10 - 4 + 18 + 8) + 1(10 - 1 + 18 + 22) = 842$ км. Коэффициент использования пробега согласно (3.3) составит $P = 788 / (842 + 788) = 0,48$, что на 14% выше, чем при работе по первому плану.

Контрольные вопросы

1. Что называется маршрутизацией перевозок?
2. Цель осуществления маршрутизации перевозок.
3. Для перевозки каких грузов маршрутизация является особенно актуальной?
4. Подходы к организации работы при составлении маршрутов.
5. Деление задач маршрутизации.
6. Характеристика задач маршрутизации помашинных перевозок.
7. Сложность задач маршрутизации.
8. Факторы, влияющие на планирование маятниковых маршрутов.

Лекция 10. Решение задачи оптимального объезда точек в маршрутах

Вопросы лекции:

3. Оптимизация мелкопартионных перевозок грузов
4. Решение задачи оптимального объезда точек в маршрутах

Вопрос 1. Оптимизация мелкопартионных перевозок грузов

Среди задач планирования ГАП особо выделяются задачи планирования мелкопартионных перевозок, когда размер отправляемой или получаемой партии груза существенно меньше грузопместимости используемых АТС.

При мелкопартионных перевозках ПС, загрузившись у одного отправителя грузов, должен развезти груз нескольким получателям, разгружая у каждого из них определенное количество груза. В этом случае имеет место развозочный маршрут. Если необходимо объехать несколько пунктов и в каждом из них загрузить некоторое количество груза, а затем завезти его потребителю, то такой

Моделирование транспортных процессов

маршрут называется сборочным. Если автомобиль одновременно развозит и собирает мелкие партии груза, маршрут называется развозочно-сборочным.

Как правило, мелкопартионные перевозки выполняются при обслуживании организаций торговли и бытового обслуживания. На этих перевозках занято около 50 % грузового парка автомобилей, но на их долю приходится всего около 2 % грузооборота. Для мелкопартионных перевозок характерны следующие особенности, которые необходимо учитывать при их планировании:

- время выполнения погрузочно-разгрузочных работ существенно превышает время движения;

- время движения зависит от загруженности транспортных магистралей, по которым проходит маршрут движения;

- существенное значение имеет своевременность и гарантированность доставки груза;

- на время выполнения перевозок могут накладываться ограничения, связанные с требованиями соблюдения экологических и шумовых норм.

В процессе планирования развозочно-сборочных маршрутов возникает необходимость построения маршрута таким образом, чтобы не превышалась грузопместимость автомобиля, при этом последовательность объезда пунктов должна быть выбрана так, чтобы суммарный пробег по маршруту был минимальным. Следу

209

ет также учитывать необходимость максимального использования грузопместимости автомобиля и стремиться к выполнению перевозок минимальным количеством подвижного состава.

Задачи планирования мелкопартионных перевозок относятся к классу задач дискретной оптимизации (в прикладной математике они называются конечными оптимизационными задачами, т.е. такими задачами, в которых конечность множества допустимых решений позволяет считать их всегда разрешимыми, так как можно перебрать все решения и выбрать лучшее из них). Однако полный перебор вариантов часто нереален из-за слишком большого множества допустимых решений. Например, задача объезда десяти пунктов на маршруте имеет 3 628 800 вариантов решения. Выбор методов решения задач маршрутизации мелкопартионных перевозок представлен на рис. 8.8.

Среди методов решения задач маршрутизации мелкопартионных перевозок, дающих точное решение, наибольшее распространение получил метод «ветвей и границ». Общая идея метода достаточно проста. Вначале для всего множества допустимых решений определяется нижняя граница, которая представляет число, меньше которого значение целевой функции быть не может. Решение задачи заключается в постепенном разбиении множества допустимых решений на все меньшие и меньшие подмножества, для каждого из которых определяется нижняя граница и выбирается подмножество с наименьшим ее значением. Выбранное множество опять разбивается на подмножества, выбирается из них одно с наименьшей границей и т. д. В итоге должно быть получено подмножество, содержащее одно единственное решение, нижняя граница которого совпадает со значением целевой функции.

Моделирование транспортных процессов

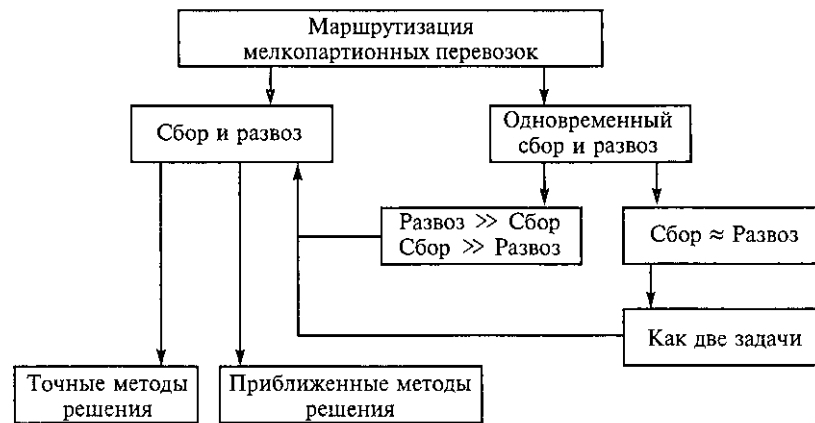


Рис. 8.8. Методы маршрутизации мелкопартионных перевозок

210

Метод функций «выгоды» был предложен английскими специалистами Кларком и Райтом для решения задачи автомобильных мелкопартионных перевозок с одним отправителем или получателем. Этот метод получил название метода Кларка—Райта. Метод основан на понятии эффекта (выгоды), который получается от объединения двух маятниковых маршрутов в один кольцевой.

Пусть есть два маятниковых маршрута $0 \rightarrow / \rightarrow 0 \rightarrow y \rightarrow 0$. Каждый из них начинается и заканчивается в пункте 0, который является пунктом-отправителем или пунктом-получателем (будем называть этот пункт центральным пунктом).

Эффект от объединения

$$f_{ij} = l_{0i} + l_{j0} - l_{ij}, \quad \text{этих двух маршрутов в один равен}$$

(8.1)

где l_{0i} — расстояние от центрального пункта до пункта i ; l_{j0} — расстояние от пункта y до центрального пункта; l_{ij} — расстояние между пунктами i и y .

Действительно, в результате объединения двух маршрутов отпадает необходимость возврата с i -го маршрута на центральный пункт и подачи автомобиля с центрального пункта на y -й маршрут (т. е. из пробега автомобиля вычитаются расстояния l_{0i} и l_{j0}). Но вместо этого появляется пробег от последней точки i -го маршрута до первой точки y -го маршрута (т.е. к пробегу автомобиля добавляется расстояние l_{ij}).

Таким образом, некоторые маршруты можно объединять, в соответствии с величиной «выгоды», в более крупные маршруты. Если при этом для возможных объединений использовать маршруты, величина «выгоды» на которых имеет наибольшее значение, то можно рассчитывать, что полученное решение будет близко к оптимальному.

Решение заканчивается, когда дальнейшее объединение маршрутов станет невозможно. Это может быть по двум причинам: либо не осталось ни одного положительного значения выгоды (т. е. объединять невыгодно), либо при объединении превышает грузопместимость автомобиля.

Рассмотрим следующий пример. Пусть необходимо развезти с центрального пункта продукцию нескольким потребителям, забрать и доставить на центральный склад возвратную тару от потребителей. Для обслуживания маршрутов используется два автомобиля грузопместимостью 240 и 160 единиц груза. Количество ввозимого и вывозимого груза для каждого потребителя представлено

Моделирование транспортных процессов

в табл. 8.11 (первый и второй столбцы). В остальных столбцах таблицы даны кратчайшие расстояния между пунктами.

Таким образом, на начальном этапе имеется 9 маятниковых маршрутов, суммарный пробег по которым равен 228 км.

Посчитаем значение эффекта от объединения двух маршрутов в один. Например, подсчитаем эффект от объединения 3-го и 5-го

211

Таблица 8.11

Исходные данные для построения маршрутов методом Кларка — Райта

Ввоз груза, ед.	Вывоз груза, ед.	ГОП	ГПП								
		0									
110	25	10	1								
75	30	4	8	2							
65	50	8	12	4	3						
75	45	15	8	11	7	4					
80	20	10	14	6	5	12	5				
95	30	16	12	12	8	4	13	6			
60	10	13	17	9	5	10	8	6	7		
70	20	15	18	10	6	13	5	9	3	8	
60	10	23	19	19	15	11	20	15	13	16	9

маршрутов. Расстояние от 0-го пункта до 3-го пункта равно 8. Расстояние от 0-го пункта до 5-го пункта равно 10. Расстояние между пунктом 3 и пунктом 5 равно 5. Таким образом, эффект, полученный от объединения маршрутов 0 — 3 — 0 и 0 — 5 — 0, будет равен (см. (8.1))

$$f_{ij} = k_i + I_{jo} - \text{///} = 8 + 10 - 5 = 13.$$

Полученное значение эффекта от объединения занесем в таблицу (табл. 8.12). Рассчитаем эффекты от объединения всех пар маршрутов, результаты занесем в табл. 8.12.

Добавим в таблицу еще один столбец — столбец признака. Признак может принимать одно из трех значений:

2 — пункт включен в маятниковый маршрут вида 0 —/—0;

1 — это значение признака говорит о том, что данный пункт является первым или последним пунктом кольцевого маршрута (при этом пункт 0 в развозочно-сборочном маршруте не учитывается);

0 — данный пункт является внутренним пунктом кольцевого маршрута и его нельзя использовать для объединения маршрутов.

Из табл. 8.12 видно, что наибольший эффект, равный 27, получается при объединении маршрутов 0 — 4 — 0 и 0 — 6 — 0 и маршрутов 0—4—0 и 0—9—0. Объединим маршруты 0—4—0 и 0 —6—0. Суммарное количество ввозимого груза для объединенного маршрута равно 170 (75 + 95), а суммарное количество вывозимого груза будет равно 75 (45 + 30). Маршрут может быть выполнен автомобилем грузоподъемностью 240 единиц.

212

Таблица 8.12

Матрица выигрышей

Ввоз, ед.	Вывоз, ед.	Признак	ГПП									
110	25	2	1									
75	30	2	6	2								
65	50	2	6	8	3							
75	45	2	17	8	16	4						
80	20	2	6	8	13	13	5					
95	30	2	14	8	16	27	13	6				
60	10	2	6	8	16	18	15	23	7			
70	20	2	7	9	17	17	20	22	25	8		
60	10	2	14	8	16	27	13	24	23	22	9	

После объединения маршрутов в ячейках первого столбца 4-й и 6-й строк будет стоять суммарное количество ввозимого груза, т.е. число 170, а второго столбца — суммарное количество вывозимого груза, т.е. число 75.

Значение признака для этих строк равно 1, т.е. пункты 4 и 6 являются первым и последним пунктом на маршруте (табл. 8.13). В графу «Маршрут» для пунктов 4 и 6 запишем цифру 1 (это означает, что эти пункты входят в первый кольцевой маршрут).

Таблица 8.13

Матрица выигрышей при включении в маршрут двух пунктов

Ввоз, ед.	Вывоз, ед.	При- знак	Марш- рут	ГПП									
110	25	2		1									
75	30	2		6	2								
65	50	2		6	8	3							
170	75	1	1	17	8	16	4						
80	20	2		6	8	13	13	5					
170	75	1	1	14	8	16	27	13	6				
60	10	2		6	8	16	18	15	23	7			
70	20	2		7	9	17	17	20	22	25	8		
60	10	2		14	8	16	27	13	24	23	22	9	

213

На следующем шаге рассматриваем объединение маршрутов 0—4—6—0 и 0—9—0, так как величина соответствующей им выгоды является наибольшей. Для объединенного маршрута количество ввозимого груза будет равно 230 (170 + 60),

Моделирование транспортных процессов

а количество вывозимого груза составит 85 (75 + 10) единиц. Для выполнения маршрута 0 — 9 — 4 — 6 — 0 будет достаточно автомобиля грузоподъемностью 240 единиц. Запишем суммарное количество ввозимого и вывозимого груза в табл. 8.14.

Пункт 4 становится внутренним пунктом маршрута, и значение признака для этого пункта устанавливается равным 0. Соответствующие этому пункту строка и столбец вычеркиваются и далее не рассматриваются. Пункты 6 и 9 — начальный и конечный пункты маршрута, значение признака для этих пунктов равно 1.

Значение следующей наибольшей выгоды равно 25; это эффект, который получается при объединении маршрутов 0 — 7 — 0 и 0 — 8 — 0. Суммарное количество ввозимого груза для этого объединенного маршрута составит 130 единиц, а суммарное количество вывозимого груза — 30 единиц. Маршрут может быть выполнен на автомобиле грузоподъемностью 160 единиц, это второй маршрут. Заносим данные в табл. 8.15. Значение признака для этих пунктов становится равным 1.

Эффект от объединения пунктов 6 и 9 в маршрутах равен 24, это следующая наибольшая выгода в таблице. Но эти пункты уже входят в один и тот же маршрут, поэтому полученную выгоду рассматривать не будем.

Дальнейшие вычисления будут заноситься в табл. 8.15. На следующем шаге видно, что наибольший эффект, равный 23, полу-

Таблица 8.14

Матрица выигрышей при включении в маршрут трех пунктов

Ввоз, ед.	Вывоз, ед.	При- знак	Марш- рут	ГПП									
110	25	2		1									
75	30	2		6	2								
65	50	2		6	8	3							
230	85	0	1	17	8	16	4						
80	20	2		6	8	13	13	5					
230	85	1	1	14	8	16	27	13	6				
60	10	2		6	8	16	18	15	23	7			
70	20	2		7	9	17	17	20	22	25	8		
230	80	1	1	14	8	16	27	13	24	23	22	9	

214

Таблица 8.15

Матрица выигрышей при составлении двух маршрутов

Моделирование транспортных процессов

Ввоз, ед.	Вывоз, ед.	При- знак	Марш- рут	ГПП								
110	25	2		1								
75	30	2		6	2							
65	50	2		6	8	3						
230	85	0	1	17	8	16	4					
80	20	2		6	8	13	13	5				
230	85	1	1	14	8	16	27	13	6			
130	30	1	2	6	8	16	18	15	23	7		
130	30	1	2	7	9	17	17	20	22	25	8	
230	85	1	1	14	8	16	27	13	24	23	22	9

чается при объединении пунктов 6 и 7 или пунктов 7 и 9. Так как пункты 6 и 9 уже входят в один объединенный маршрут, можно на этом шаге просто рассмотреть возможность объединения маршрутов 0-6-4-9-0 и 0-7-8-0.

Суммарное количество ввозимого груза при объединении этих маршрутов составит 360 единиц, при этом будет превышена грузоподъемность имеющихся в распоряжении автомобилей. Следовательно, от объединения этих маршрутов необходимо отказаться.

Следующий по убыванию эффект равен 22, он может быть получен при объединении пунктов 6 и 8 или пунктов 8 и 9, но это также означает, что необходимо объединить маршруты 0 — 6 — 4 — 9 — 0 и 0 — 7 — 8 — 0, а это сделать невозможно. Можно заметить, что суммарное количество ввозимого груза для маршрута 0 — 6 — 4 — 9 — 0 составляет 230 единиц. Так как максимальная грузоподъемность автомобиля составляет 240 единиц и больше нет пунктов с объемом ввозимого груза менее чем 10 единиц, то рассматривать любые варианты объединения маршрута 0 — 6 — 4 — 9 — 0 с другими маршрутами не имеет смысла. Поэтому можно исключить из рассмотрения строки и столбцы, соответствующие пунктам 4, 6 и 9.

Значение следующей наибольшей выгоды равно 20; это эффект, который получается при объединении маршрутов 0 — 5 — 0 и 0 — 8 — 7 — 0. Суммарное количество ввозимого груза для этого объединенного маршрута 0 — 7 — 8 — 5 — 0 составит 210 единиц, а суммарное количество вывозимого груза — 50 единиц. Маршрут может быть выполнен на автомобиле грузоподъемностью 240 единиц, поэтому включаем пункт 5 во второй маршрут.

Таблица 8.16

Матрица выигрышей после составления маршрутов

Ввоз, ед.	Вывоз, ед.	При- знак	Марш- рут	ГПП									
110	25	2	4	1									
140	80	1	3	6	2								
140	80	1	3	6	8	3	*						
230	85	0	1	17	8	16	4	*					
210	50	1	2	6	8	13	13	5	*				
230	85	1	1	14	8	16	27	13	6	*			
210	50	1	2	6	8	16	18	15	23	7	*		
210	50	0	2	7	9	17	17	20	22	25	8	*	
230	85	1	1	14	8	16	27	13	24	23	22	9	

Заносим эти данные в табл. 8.16. Значение признака для пунктов 5 и 7 становится равным 1. Пункт 8 является внутренним пунктом маршрута, и значение признака для него равно 0. Соответствующие этому пункту строка и столбец исключаются из рассмотрения.

Так как максимальная грузопместимость автомобиля составляет 240 единиц и больше нет пунктов с объемом ввозимого груза менее чем 30 единиц, то можно исключить из рассмотрения любые варианты объединения маршрута 0—7—8—5—0 с другими маршрутами.

Из оставшихся для рассмотрения вариантов максимальный эффект, равный 8, может быть получен при объединении маятниковых маршрутов 0 — 2 — ОиО — 3 — 0. Суммарное количество ввозимого груза при этом составит 140 единиц, а вывозимого груза — 80 единиц. Организуем маршрут 3 и для его выполнения выбираем автомобиль грузопместимостью 160 единиц.

Возможный последний вариант объединения маршрутов 0 — 2 — 3 — ОиО—1 — 0 может дать эффект, равный 6. Но суммарное количество ввозимого груза при таком объединении составит 250 единиц. Так как автомобиля соответствующей грузопместимости нет, от этого варианта придется отказаться.

Таким образом, остается последний маятниковый маршрут 0—1 — 0 — маршрут 4. На этом построение маршрутов методом Кларка —Райта закончено.

Получены следующие результаты. Для выполнения развозоч- но-сборочных маршрутов согласно заданию необходимо:

216

два автомобиля грузопместимостью 240 единиц для выполнения маршрутов 1: 0 — 6 — 4 — 9 — 0 (загрузка автомобиля при ввозе 230 единиц, а при вывозе 85 единиц) — и 2: 0 — 7 — 8 — 5 — 0 (загрузка при ввозе 210 единиц, при вывозе 50 единиц);

два автомобиля грузопместимостью 160 единиц для выполнения маршрутов 3: 0 — 2 — 3 — 0 (загрузка при ввозе 140 единиц, при вывозе 80 единиц) — и 4: 0 — 1 — 0 (загрузка при ввозе 110 единиц, при вывозе 25 единиц).

Пробег по объединенным маршрутам составляет 54 км (маршрут 1), 31 км (маршрут 2), 16 км (маршрут 3), 20 км (маршрут 4).

Таким образом, суммарный пробег по объединенным кольцевым маршрутам равен 121 км; суммарный пробег по маятниковым маршрутам равен 228 км. Пробег автомобилей сократился на 107 км.

Описанный метод является приближенным методом, так как объединение двух маршрутов в один производится по максимальному значению «выгоды» на одном шаге, без анализа последующих шагов. Поэтому принимаемые решения по включению пунктов в маршрут необходимо контролировать по схеме транспортной сети, чтобы не получить противоречивых результатов.

Вопрос 2. Решение задачи оптимального объезда точек в маршрутах.

Метод Кларка — Райта не гарантирует оптимальный порядок объезда пунктов внутри маршрута. Поэтому после получения кольцевых маршрутов необходимо для каждого маршрута решить задачу оптимального объезда пунктов в маршруте (эта задача еще называется задачей коммивояжера) с целью сокращения общего пробега на маршруте.

Одним из наиболее простых приближенных методов решения задачи рационального объезда точек в маршруте является метод сумм. В качестве исходных данных для этого метода необходима матрица кратчайших расстояний между пунктами маршрута.

Рассмотрим пример. Найдём оптимальный вариант объезда точек в маршруте 1, который проходит через пункты 0 — 6 — 4 — 9 — 0. Матрица кратчайших расстояний между пунктами этого маршрута приведена в табл. 8.17. В итоговой строке каждой таблицы проставим сумму расстояний по каждому столбцу.

Затем выбираем три пункта маршрута, имеющих наибольшие суммы в итоговой строке. В данном случае это пункты 0, 6 и 9, которые образуют кольцевой маршрут 0 — 6 — 9 — 0.

В маршрут необходимо вставить пункт со следующей максимальной суммой в итоговой строке. В данном примере это пункт 4, он является последним пунктом, входящим в маршрут.

Пункт 4 может быть вставлен в маршрут между следующими парами пунктов (0 и 6), (6 и 9) или (9 и 0). Чтобы определить, между какими пунктами его следует вставить, необходимо найти минимально возможное увеличение длины маршрута Δl_{ij} , обус-

Таблица 8.17

Исходные данные для построения оптимальной последовательности объезда пунктов на маршруте

Пункты	0	4	6	9
0	0	15	16	23
4	15	0	4	11
6	16	4	0	15
9	23	11	15	0
Итого	54	30	35	49

ловленное включением пункта 4 в маршрут 0 — 6 — 9 — 0. Величину Δl_{ij} находят по формуле

$$\Delta l_{ij} = l_{ik} + l_{kj} + l_{ij}, \quad (8.2)$$

Моделирование транспортных процессов

где / и j — пункты, между которыми предполагается вставить новый пункт в маршрут; k — вставляемый в маршрут пункт; h_j — расстояние между соответствующими пунктами.

Определим по формуле (8.2) увеличение длины маршрута 0 — 6 — 9 — 0 при включении в него пункта 4:

$$\Delta l_{06} = l_{04} + l_{46} - l_{06} = 15 + 4 - 16 = 3;$$

$$\Delta l_{69} = l_{64} + l_{49} - l_{69} = 4 + 11 - 15 = 0;$$

$$\Delta l_{90} = l_{94} + l_{40} - l_{90} = 11 + 15 - 23 = 3.$$

Минимальное увеличение длины маршрута и определяет место вставки нового пункта в маршрут. В данном примере минимальное увеличение длины маршрута, равное 0, получается при вставке пункта 4 в маршрут между пунктами 6 и 9. Таким образом, маршрут примет следующий вид: 0 — 6 — 4 — 9 — 0.

Если бы были еще пункты, не включенные в маршрут, надо было бы продолжить описанные действия. В данном примере пунктов, не включенных в маршрут, больше нет.

Получили маршрут 0 — 6 — 4 — 9 — 0. Последовательность объезда точек маршрута в данном случае совпала с последовательностью объезда точек, полученной в результате планирования мелкопартионных перевозок методом Кларка — Райта.

Контрольные вопросы:

1. Какие задачи выделяются особо среди задач планирования грузовых автомобильных перевозок?
2. Какой маршрут называется развозочным?
3. Какой маршрут называется сборочным?
4. Какой маршрут называется развозочно-сборочным?
5. При обслуживании каких организаций выполняются мелкопартионные перевозки?
6. Характерные особенности для мелкопартионных перевозок.
7. Наиболее простой приближенный методов решения задачи рационального объезда точек в маршруте

Лекция 11. Постановка задач динамического программирования

Вопросы лекции:

1. Основные понятия и постановка задач динамического программирования
2. Распределение ресурсов методом динамического программирования

Вопрос 1. Основные понятия и постановка задач динамического программирования

Динамическое программирование представляет собой математический метод оптимизации, позволяющий осуществлять оптимальное планирование

Моделирование транспортных процессов

многошаговых (многоэтапных) управляемых процессов и процессов, зависящих от времени. Экономический процесс называется управляемым, если можно влиять на ход его развития. Управлением называется совокупность решений, принимаемых на каждом этапе с целью влияния на ход процесса.

Задачи, решаемые методом динамического программирования, формулируются следующим образом: имеется управляемый процесс, задано его начальное и конечное состояния, требуется определить значения факторов его состояния, обеспечивающих получение оптимума функции процесса в целом. К наиболее типичным задачам динамического программирования относятся: распределение ресурсов и капитальных вложений между возможными направлениями их использования (по объему и времени); задача о замене оборудования; составление календарных планов текущего и капитального ремонта сложного оборудования; определение кратчайших расстояний на заданной транспортной сети и др.

Задачи динамического программирования имеют отличительные свойства. Отметим основные из них.

1. Процесс принятия решений распадается на несколько этапов, на каждом из которых принимается решение с таким условием, чтобы обеспечивалась оптимальность всего процесса в целом.

2. Независимость оптимального плана от предыстории. Оптимальный план зависит от состояния изучаемого процесса в исходный момент времени, а не от того, как было достигнуто исходное состояние.

3. Значение функции цели процесса должно складываться из элементарных значений функции, рассчитываемой для каждого этапа. Это требование динамического программирования¹ относительно критерия оптимальности называется аддитивностью.

В задачах динамического программирования управление по этапам должно выбираться с учетом всех его последствий в будущем. На каждом этапе определяется такое управление, которое обеспечивает оптимальное продолжение процесса относительно достигнутого в данный момент состояния. Этот принцип называется принципом оптимальности, он сформулирован Р. Беллманом - американским математиком, основоположником метода динамического программирования. Другими словами, при планировании многоэтапного процесса следует

171

исходить из интересов процесса в целом, т.е. при принятии решения на этапе необходимо иметь в виду конечную цель.

Именно на основе общего принципа оптимальности можно уверенно отбрасывать некоторые решения на последующих этапах, даже не зная тех решений, которые были приняты на предыдущих. В противном случае приходилось бы перебирать все возможные варианты (комбинации) последовательностей, что значительно затруднило бы решение задач динамического программирования.

Из принципа оптимальности есть исключение. На последнем этапе можно действовать без оценки будущего этапа, поскольку его нет. На последнем этапе управление следует выбирать так, чтобы оно дало наибольший эффект и было на этом этапе наилучшим. Поэтому процесс динамического планирования проводится в обратном во времени направлении, т.е. сначала планируется последний этап. При этом необходимо сделать разные предположения о том, чем закончился предпоследний этап, и для каждого из этих направлений выбрать управление на

Моделирование транспортных процессов

последнем этапе. Естественно, это будет условно оптимальное управление, поскольку оно основано на предположении, что предыдущий этап окончился так-то. На I этапе не надо делать никаких гипотез о состоянии системы, так как начальное состояние задано условиями задачи. Поэтому с учетом найденных условно оптимальных управлений на последующих этапах мы можем найти безусловно оптимальное управление на I этапе, которое и является оптимальным управлением для всего процесса. Следовательно, задача динамического программирования решается в два этапа: на I этапе, который выполняется от конца процесса к началу, находят условные оптимальные решения; на II этапе, который выполняется от начала процесса к концу, находят безусловно оптимальное решение.

Процесс решения задачи динамического программирования включает следующие операции.

1. Исследуемый экономический процесс разбивается на составные элементы - этапы. Некоторые операции расчленяются на этапы естественно: например, при планировании производства на предприятии естественным этапом является год. Для других операций разделение на этапы приходится вводить искусственно.

2. Для каждого этапа вводятся функциональные характеристики (параметры или переменные) процесса и их числовые значения. Затем выделяются управляющие факторы, с помощью которых можно влиять на развитие процесса.

3. На каждом этапе решения задачи динамического программирования имеется зависимость между рассматриваемыми переменными и функцией цели. Зависимость выражается с помощью уравнений, неравенств и не обязательно должна быть линейной. Методом динамического программирования для каждого этапа устанавливают такой уровень управления, который обеспечивает оптимальность функции цели процесса в целом.

172

Рассмотрим достоинства и недостатки метода динамического программирования.

Достоинство динамического программирования заключается прежде всего в том, что задача разбивается на этапы и решение осуществляется для каждого из них. Тем самым сложная многовариантная задача оптимизации сводится к совокупности более простых частных задач, что значительно упрощает процедуру расчетов. Динамическое программирование приспособлено к решению значительного числа практических задач экономики и позволяет проводить анализ структуры полученного решения по этапам. Этот метод позволил также значительно расширить круг решаемых вариационных задач за счет включения нелинейных и плохо формализуемых задач.

К недостаткам метода динамического программирования следует отнести отсутствие общего алгоритма решения, пригодного для всех задач. Метод дает лишь общее направление решения конкретной задачи, и поэтому в каждом случае необходимо находить наиболее подходящий метод оптимизации. Значительна также трудоемкость решения задач оптимизации большой размерности, что требует применения совершенной вычислительной техники. Вместе с тем в сравнении с обычными комбинаторными методами, когда ведется перебор возможных вариантов решений, динамический метод значительно эффективнее.

Так, чтобы получить обычным методом перебора вариантов оптимальное решение, необходимо проанализировать k^n возможных комбинаций (k - количество решений, которое принимается на каждом этапе; n - количество этапов). При динамическом методе рассматривается k возможных решений,

Моделирование транспортных процессов

поскольку на каждом этапе выбирается наилучшее решение, а все неблагоприятные комбинации из рассмотрения исключаются. Если предположить $k = 3$, $l = 10$, то комбинаторный подход требует для анализа $k^n = 3^{10} = 59\,000$ комбинаций. Метод поэтапного расчета, применяемый в динамическом программировании, потребует анализа $k \cdot n = 3 \cdot 10 = 30$ комбинаций. Эффективность метода динамического программирования становится все более существенной с ростом n .

Идею и принципы метода динамического программирования рассмотрим на примере задачи выбора кратчайшего маршрута на транспортной сети.

На рис. 6.1 показаны транспортная сеть и возможные пути, соединяющие исходный пункт 1 с конечным пунктом 12, указаны также расстояния между пунктами в километрах. Условно пункты сети можно отнести к шести этапам. Задача заключается в том, чтобы выбрать маршрут от пункта 1 до пункта 12 наименьшей протяженности.

Согласно алгоритму метода динамического программирования анализ вариантов начинается с конца процесса. Вначале определим минимальные расстояния от пунктов 10 и 11 до конечного пункта 12 (V этап). Минимальные расстояния определим с помощью расчетных таблиц. Так, из табл. 6.1 следует, что на V этапе никаких комбинаций

173

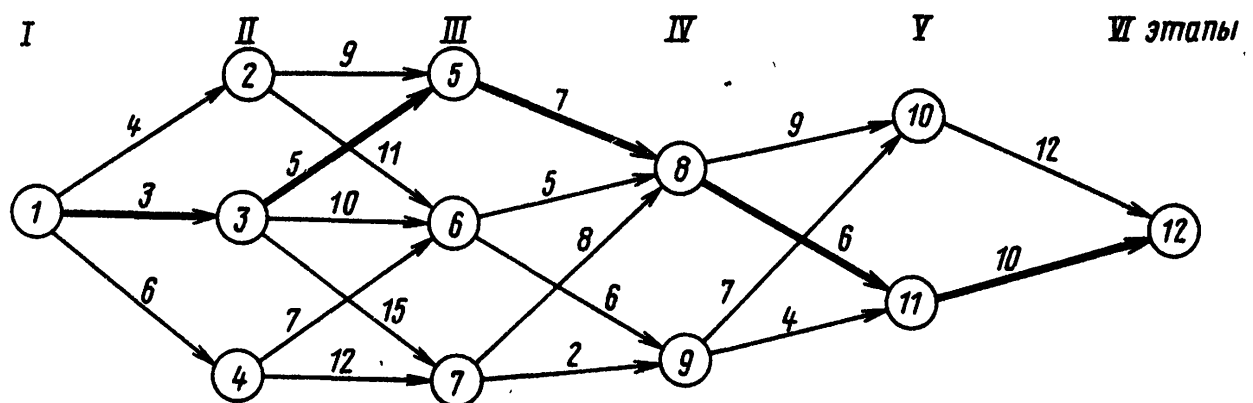


Рис. 11.1 Схема транспортной сети

нет, из пунктов 10 и 11 в пункт 12 имеется только по одному пути, соответственно 12 и 10 км. На IV этапе выбрать самый короткий путь из пунктов 8 и 9 через пункты V этапа в конечный пункт 12.

Возможные варианты представлены в табл. 6.2. Для перемещения из пункта 8 в пункт 10 необходимо пройти 9 км, а из пункта 10 в пункт 12 (см. табл. 6.1) - 12 км, общая длина пути составит 21 км. Если этот путь будет проходить через пункт 11, то его длина составит 16 км. Из двух возможных комбинаций выбираем ту, которая соответствует минимальному расстоянию - 16 км, т.е. путь должен пройти через пункт 11. Аналогично находим расстояние перемещения из пункта 9 IV этапа через пункты V этапа в конечный пункт 12. Рациональным при этом оказался путь через пункт 11 длиной 14 км. Это значение проставляем в столбце $\min L/v-vr$, а клетки таблицы с нерациональными расстояниями зачеркиваем. Таким же образом рассматриваем варианты перемещения из пунктов III этапа в пункт 12 через пункты IV этапа (табл. 6.3), а из пунктов II этапа через пункты III этапа в

Моделирование транспортных процессов

конечный пункт 12 (табл. 6.4). И наконец расстояния перемещения из начального пункта 1 через пункты 2,3 и 4 Я этапа представлены в табл. 6.5.

Таким образом, следуя от конца маршрута, мы вначале определили, через какой пункт рационально двигаться, чтобы оказаться в пунктах IV этапа, затем III этапа и так до пункта 1. Следовательно, получено условное оптимальное решение задачи. После этого, следуя от начала маршрута к концу, используя данные табл. 6.1 - 6.5, в которых условные оптимальные решения остались незачеркнутыми, находим действительно оптимальное решение. Из табл. 6.5 видно, что необходимо двигаться из пункта 1 в пункт 3. Из табл. 6.4 следует, что из пункта 3 надо перемещаться в пункт 5; из пункта 5 - в пункт 8 (см. табл. 6.3); из пункта 8 - в пункт 11 (см. табл. 6.2) и, наконец, из табл. 6.1 видно, что из пункта 11 необходимо следовать в конечный пункт 12. Следовательно, оптимальным является маршрут 1-3-5-8- 11- 12. На рис. 6.1 оптимальный маршрут выделен жирным шрифтом. Длина маршрута будет минимальной и составит $3 + 5 + 7 + 6 + 10 = 31$ км.

Большинство задач динамического программирования решают с помощью функциональных уравнений. Для задачи определения

174 кратчайшего маршрута на транспортной сети (см. рис. 6.1) функциональное уравнение в общем виде будет следующим

$$f_i = \min (l_{ij} + f_j),$$

где l_{ij} — расстояние между пунктами i и j ; f_j — минимальное расстояние передвижения от пункта j к конечному пункту 12 по допустимым маршрутам при использовании оптимальной стратегии.

Решение задачи динамического программирования по определению рационального маршрута методом функциональных уравнений приведено ниже:

$$f_{12} = 0;$$

$$f_{11} = \min(l_{11-12} + f_{12}) = \min(10 + 0) = 10;$$

$$f_{10} = \min(l_{10-12} + f_{12}) = \min(11 + 0) = 11;$$

$$f_9 = \min \left\{ \begin{matrix} l_{9-11} + f_{11} \\ l_{9-10} + f_{10} \end{matrix} \right\} = \min \left\{ \begin{matrix} 4 + 10 \\ 7 + 11 \end{matrix} \right\} = 14;$$

$$f_8 = \min \left\{ \begin{matrix} l_{8-11} + f_{11} \\ l_{8-10} + f_{10} \end{matrix} \right\} = \min \left\{ \begin{matrix} 6 + 10 \\ 9 + 11 \end{matrix} \right\} = 16;$$

Таблица 6.1

Из пунктов V этапа	В пункт VI этапа	min L_{V-VI}
10	12	12
11	10	10

Таблица 6.2

Из пунк- тов IV этапа	Через пункты V этапа		min L_{IV-VI}
	10	11	
8	9 + 12	6 + 10	16
9	7 + 12	4 + 10	14

Таблица 6.3

Из пунк- тов III этапа	Через пункты IV этапа		min L_{III-VI}
	8	9	
5	7 + 16	—	23
6	5 + 16	6 + 14	20
7	8 + 16	2 + 14	16

$$f_7 = \min \begin{cases} l_{7-8} + f_8 \\ l_{7-9} + f_9 \end{cases} = \min \begin{cases} 8 + 16 \\ 2 + 14 \end{cases} = 16;$$

$$f_6 = \min \begin{cases} l_{6-9} + f_9 \\ l_{6-8} + f_8 \end{cases} = \min \begin{cases} 6 + 14 \\ 5 + 16 \end{cases} = 20;$$

$$f_5 = \min(l_{5-8} + f_8) = \min(7 + 16) = 23;$$

$$f_4 = \min \begin{cases} l_{4-7} + f_7 \\ l_{4-6} + f_6 \end{cases} = \min \begin{cases} 12 + 16 \\ 7 + 20 \end{cases} = 27;$$

$$f_3 = \min \begin{cases} l_{3-7} + f_7 \\ l_{3-6} + f_6 \\ l_{3-5} + f_5 \end{cases} = \min \begin{cases} 15 + 16 \\ 10 + 20 \\ 5 + 23 \end{cases} = 28;$$

$$f_2 = \min \begin{cases} l_{2-6} + f_6 \\ l_{2-5} + f_5 \end{cases} = \min \begin{cases} 11 + 20 \\ 9 + 23 \end{cases} = 31;$$

$$f_1 = \min \begin{cases} l_{1-4} + f_4 \\ l_{1-3} + f_3 \\ l_{1-2} + f_2 \end{cases} = \min \begin{cases} 6 + 27 \\ 3 + 28 \\ 4 + 31 \end{cases} = 31.$$

Таблица 6.4

Из пунк- тов II этапа	Через пункты III этапа			min L_{II-IV}
	5	6	7	
2	9 + 23	11 + 20	—	21
3	5 + 23	10 + 20	15 + 16	28
4	—	7 + 20	12 + 16	27

Таблица 6.5

Из пунк- тов I этапа	Через пункты II этапа			min L_{I-VI}
	2	3	4	
1	4 + 31	3 + 28	6 + 27	31

Моделирование транспортных процессов

По комбинациям пунктов маршрута, обеспечивающих минимальные расстояния, определим оптимальный маршрут 1-3-5-8 - 11 - 12 длиной 31 км. Сравнив полученное решение с предыдущим табличным решением, можно убедиться в том, что результаты совпадают, значит, вычисления выполнены правильно.

Вопрос 2. Распределение ресурсов методом динамического программирования

Метод динамического программирования позволяет находить оптимальное решение задачи многоэтапного распределения однородных средств (капитальных вложений, машин, сырья и т.д.) между объектами.

Рассмотрим упрощенную задачу распределения капитальных вложений между объектами, когда не учитывается фактор времени и процесс освоения средств. Речь идет об однократном распределении средств.

Необходимо с наибольшей эффективностью распределить сумму капитальных вложений K между l объектами. Известные величины представляют собой сумму, выделяемую J -му объекту. По каждому объекту известна зависимость дополнительного выпуска продукции от суммы выделяемых капитальных вложений, т.е. заданы функции $f_i(x_i)$. Необходимо так распределить вложения, чтобы максимизировать общую величину прироста продукции.

Математически задачу можно сформулировать следующим образом.

Найти значения неизвестных x_1, \dots, x_l , удовлетворяющих условиям

$$\sum_{i=1}^l x_i = K; x_i \geq 0 \text{ (} x_i \text{ — целые),}$$

обращающие в максимум функцию

$$F_l(K) = \sum_{i=1}^l f_i(x_i),$$

где x_i — сумма возможных вложений по i -му объекту (отрасль, предприятие, цех, участок); K — капитальные вложения, подлежащие распределению; $f_i(x_i)$ — фондоотдача по i -му объекту (прибыль, прирост продукции и т.д.).

Идея алгоритма состоит в том, что объекты вложений вовлекаются в рассмотрение последовательно по одному на каждом этапе, и всякий раз решается задача распределения средств между первыми i объектами ($i = 1, 2, \dots, l$). Последняя из задач и будет являться решением поставленной. Отметим, что в данном случае процесс решения осуществляется в прямом направлении от первого этапа к последнему.

Предположим, что функция $f_i(x_i)$ непрерывна в области определения от 0 до K , а это значит, что всегда существует максимальное значение

176

функции, соответствующее оптимальному распределению средств ($x_i = 1, 2, \dots, k$) между первыми i объектами. Обозначим ее через $F_i(x_i)$. Следовательно, известен столбец чисел $F_1(1), F_1(2), \dots, F_1(K)$, а для каждого числа определен соответствующий план распределения ресурсов.

Моделирование транспортных процессов

Если на первые i объектов распределено x средств, то на $(i + 1)$ -й объект распределяют $(k - x)$ средств. При этом Необходимо, чтобы общая отдача от них на $(i + 1)$ -м объектах была бы максимальной, т.е.

$$F_{i+1}(K) = \max\{F_i(x) + f_{i+1}(K - x)\}$$

при $0 < x < K$.

Таким образом, в многоэтапных процессах с последовательным принятием решений переход системы от этапа к этапу описывается функциональными уравнениями. Функциональное уравнение вида $F_i(K)$ называется типичным или основным.

Решение задачи по оптимальному распределению ресурсов между $(i + 1)$ объектами состоит из $(n - 1)$ однотипных этапов. Этапы решения задачи следующие:

$$F_1(K) = f_1(x);$$

$$F_2(K) = \max\{f_1(x) + f_2(K - x)\};$$

$$F_3(K) = \max\{F_2(x) + f_3(K - x)\};$$

.....

$$F_{n-1}(K) = \max\{F_{n-2}(x) + f_{n-1}(K - x)\};$$

$$F_n(K) = \max\{F_{n-1}(x) + f_n(K - x)\}.$$

На каждом этапе используют вычисленный на предыдущем этапе столбец $f_{i+1}(x)$ и столбец $F_i(x)$. Начинают решение задачи с того, что назначают на первый объект все имеющиеся средства, т.е. получают $F_i(x) = f_i(x)$ ($i = 0, 1, 2, \dots, k$). Весь цикл распределения состоит из k одинаковых этапов, в каждом из которых фиксируют x ($x = 0, 1, 2, \dots, k$) и определяют одно число столбца а именно $F_{i+1}(k)$. При фиксированном значении аргумента в подцикле (этапе) выполняют следующие операции:

образуют суммы

$$F_i(x) + f_{i+1}(K - x) \quad (x = 0, 1, 2, \dots, k),$$

из них выбирают максимальную

$$F_i(K) = \max\{F_i(x) + f_{i+1}(k - x)\}$$

($x = 0, 1, 2, \dots, k$).

Таблица 6.6

Капитальные вложения (x)	Фондоотдача по автоуправлениям		
	первому $f_1(x)$	второму $f_2(x)$	третьему $f_3(x)$
0	0	0	0
1	0,5	0,4	0,6
2	0,7	0,7	1,1
3	0,9	1,0	1,3
4	1,3	1,5	1,7

Таблица 6.7

Капитальные вложения	$F_1(x)$	План распределения капитальных вложений по управлениям		
		пер- вому	вто- рому	третье- му
0	0	0	0	0
1	0,5	0,5	0	0
2	0,7	2	0	0
3	0,9	3	0	0
4	1,3	4	0	0

Основные положения описанного динамического метода рассмотрим на конкретном числовом примере.

Приведем пример. Необходимо оптимальным образом распределить 4 ед. (млн. р.) капитальных вложений ($K = 4$) между тремя автотранспортными управлениями ($l = 3$), чтобы обеспечить при этом максимальный прирост выпуска продукции (объем перевозок). Показатели фондоотдачи по каждому управлению представлены в табл. 6.6.

На I этапе капитальные вложения направляют в первое автотранспортное управление, образовав столбец чисел ($x^T 0, 1, 2, 3, 4$), соответствующих фондоотдаче в этом управлении (табл. 6.7).

На II этапе определяют столбец чисел F_i \$ и соответствующие им планы распределения средств между первым и вторым управлениями:

$$F_2(1) = \max \left\{ \begin{array}{l} F_1(1) \\ F_1(0) + f_2(1) \end{array} \right\} = \max \left\{ \begin{array}{l} 0,5 \\ 0 + 0,4 \end{array} \right\} = 0,5;$$

$$F_2(2) = \max \left\{ \begin{array}{l} F_1(2) \\ F_1(0) + f_2(2) \\ F_1(1) + f_2(1) \end{array} \right\} = \max \left\{ \begin{array}{l} 0,7 \\ 0 + 0,7 \\ 0,5 + 0,4 \end{array} \right\} = 0,9;$$

$$F_2(3) = \max \left\{ \begin{array}{l} F_1(3) \\ F_1(0) + f_2(3) \\ F_1(1) + f_2(2) \\ F_1(2) + f_2(1) \end{array} \right\} = \max \left\{ \begin{array}{l} 0,9 \\ 0 + 1,0 \\ 0,5 + 0,7 \\ 0,7 + 0,4 \end{array} \right\} = 1,2;$$

$$F_2(4) = \max \left\{ \begin{array}{l} F_1(4) \\ F_1(0) + f_2(4) \\ F_1(1) + f_2(3) \\ F_1(2) + f_2(2) \\ F_1(3) + f_2(1) \end{array} \right\} = \max \left\{ \begin{array}{l} 1,3 \\ 0 + 1,5 \\ 0,5 + 0,7 \\ 0,7 + 0,7 \\ 0,9 + 0,4 \end{array} \right\} = 1,5.$$

Таблица 6.8

Капитальные вложения	$F_1(x)$	$f_2(x)$	$F_2(x)$	План распределения капитальных вложений по автоуправлениям		
				первому	второму	третьему
1	0,5	0,4	0,5	1	0	0
2	0,7	0,7	0,9	1	1	0
3	0,9	1,0	1,2	1	2	0
4	1,3	1,5	1,5	0	4	0

Анализируя функциональные уравнения, получаем следующее: при распределении одной единицы капитальных вложений ее лучше распределить в первое автотранспортное управление, поскольку при этом получается максимальная отдача, равная 0,5 ед. При распределении двух единиц средств 1 ед. следует выделить первому и 1 ед. второму автоуправлению. При этом будет обеспечена наибольшая отдача средств, а именно 0,9 ед. Три единицы средств следует распределить так: первому автотранспортному управлению 1 ед., второму - 2 ед. И, наконец, четыре единицы средств рационально направить во второе транспортное управление, так как они обеспечат наибольшую фондоотдачу - 1,5 ед.

Результаты расчетов II этапа решения задачи приведены в табл. 6.8.

На III этапе в расчет принимается третье автотранспортное управление. Следовательно, и капитальные вложения распределяем между тремя объектами с учетом оптимальных стратегий, выбранных на первых двух этапах.

Функциональные уравнения заключительного этапа выглядят так:

$$F_3(1) = \max \left\{ \begin{matrix} F_2(1) \\ F_2(0) + f_3(1) \end{matrix} \right\} = \max \left\{ \begin{matrix} 0,5 \\ 0 + 0,6 \end{matrix} \right\} = 0,6;$$

$$F_3(2) = \max \left\{ \begin{matrix} F_2(2) \\ F_2(0) + f_3(2) \\ F_2(1) + f_3(1) \end{matrix} \right\} = \max \left\{ \begin{matrix} 0,9 \\ 0 + 1,1 \\ 0,5 + 0,6 \end{matrix} \right\} = 1,1.$$

Если наибольших сумм несколько, то выбирают любую из них (см. $F_2(3)$ Л

$$F_3(3) = \max \left\{ \begin{matrix} F_2(3) \\ F_2(0) + f_3(3) \\ F_2(1) + f_3(2) \\ F_2(2) + f_3(1) \end{matrix} \right\} = \max \left\{ \begin{matrix} 1,2 \\ 0 + 1,3 \\ 0,5 + 1,1 \\ 0,9 + 0,6 \end{matrix} \right\} = 1,6;$$

$$F_3(4) = \max \begin{Bmatrix} F_2(4) \\ F_2(0) + f_3(4) \\ F_2(1) + f_3(3) \\ F_2(2) + f_3(2) \\ F_2(3) + f_3(1) \end{Bmatrix} = \max \begin{Bmatrix} 1,5 \\ 0 + 1,7 \\ 0,5 + 1,3 \\ 0,9 + 1,1 \\ 1,2 + 0,6 \end{Bmatrix} = 2.$$

На обратном цикле определяем, в какие управления следует вкладывать средства и сколько должно их быть, чтобы общая отдача от них была максимальной. Например, при распределении четырех единиц капитальных вложений две из них рационально выделить третьему управлению. Это следует из III этапа решения задачи. Две оставшиеся единицы целесообразно распределить между первым и вторым управлениями. Чтобы узнать, как их распределить оптимальным образом, надо вернуться ко II этапу решения и рассмотреть соответствующую стратегию $F_2(2)$. Из нее следует, что каждому из двух управлений следует выделить по одной единице капитальных вложений. При этом достигается максимальная фондоотдача от всех четырех единиц вложений, которая составляет 2 ед.

Результаты расчетов III заключительного этапа решения показаны в табл. 6.9.

Решим более сложную задачу распределения ресурсов, в которой учитывается фактор времени и степень освоения ресурсов. Сформулируем задачу и метод ее решения сначала в общем виде.

Пусть имеется некоторое количество капитальных вложений $/C$, которое необходимо вложить в t объектов в течение p этапов. В результате вложений в $/$ -й объект ($/ = 1, 2, p$) на $;$ -м этапе ($/ = 1, 2, p$) ресурсов x_{ij} образуется ежегодный доход, определяемый функцией дохода $f_{ij}(x_{ij})$. Вложенные средства частично уменьшаются (амортизируются, тратятся). Другая часть ресурсов остается неизрасходованной и определяется функцией остатка $a(X_{ij})$.

Задача заключается в том, чтобы определить значения x_{ij} вложения ресурсов на каждом этапе в каждый объект, которые обеспечивают максимальный доход F на всех объектах и этапах. Это одна из

Таблица 6.9

Капитальные вложения X	$Ч^*)$	$/зМ$	$*зМ$	План распределения капитальных вложений по управлениям		
				первому	второму	третьему
1	0,5	0,6	0,6	0	0	1
2	0,9	1,1	1,1	0	0	2
3	1,2	1,3	1,6	0	1	2
4	1,5	1,7	2,0	1	1	2

Моделирование транспортных процессов

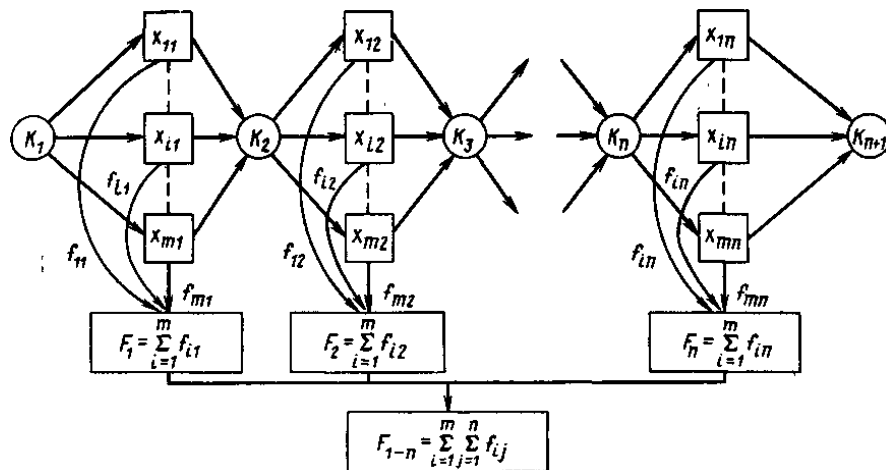


Рис. 6.2. Схема решения задачи методом динамического программирования

типичных задач динамического программирования. Схематично последовательность решения задачи методом динамического программирования показана на рис. 6.2.

Из рис. 6.2 следует, что начальный ресурс K_1 на I этапе распределяется между m объектами. В первый объект вкладывают x_{11} ; в i -й объект — x_{i1} ; в m -й объект — x_{m1} . Общий доход на I этапе равен сумме доходов на каждом объекте $F_1 = \sum_{i=1}^m f_{i1}(x_{i1})$. Суммарный остаток к концу I этапа и началу II этапа составит $\sum_{i=1}^m a_{i1}(x_{i1}) = K_2$ и является ресурсом для II этапа.

На II этапе распределяют ресурсы K_2 и т.д. Тогда общий доход на m объектах за n этапов равен

$$F_{1:n}(K) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f_{ij}(x_{ij}).$$

Математически задача может быть записана следующей моделью:

$$F_{1:n}(K) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f_{ij}(x_{ij}) \rightarrow \max;$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = K_j;$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}(x_{ij}) = K_{j+1} \text{ при}$$

$$x_{ij} \geq 0, (i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n).$$

Моделирование транспортных процессов

Согласно принципу оптимальности на каждом этапе необходимо так распределить ресурсы, чтобы, начиная с этого этапа и до конца процесса, доход был максимальным. Доход на этапах, начиная от j -го и кончая n -м, запишем

$$F_{j:n} = \max \{F_j + f_{(j+1):n}\},$$

где $f_{(j+1):n}$ - доход, полученный на последующих этапах.

Система функциональных уравнений для различных этапов будет следующей:

$$F_{1:n} = \max \{F_1 + f_{2:n}\};$$

$$F_{2:n} = \max \{F_2 + f_{3:n}\};$$

.....

$$F_{(n-1):n} = \max \{F_{n-1} + f_n\};$$

$$F_n = f_n.$$

При распределении ресурсов необходимо думать не только о максимальном доходе на данном этапе, но и о влиянии этого распределения на последующие этапы. И только на последнем этапе распределять ресурс следует так, чтобы получить максимальный доход именно на этом этапе, поскольку остаток ресурса после l -го этапа нас уже не интересует. В соответствии с этим принципом задачу решают начиная с последнего этапа. Затем следует переходить к решению предпоследнего этапа, определяя условно оптимальное распределение, и так до первого этапа, где, зная, с чего начинается процесс, необходимо определить действительно оптимальное решение. Затем, идя от начала процесса распределения к концу, находится оптимальное распределение ресурса уже для всего процесса.

Перейдем к конкретной задаче распределения ресурсов динамическим методом. Пусть имеется 10 ед. (млн. р.) капитальных вложений, т.е. начальный ресурс $K_i = 10$, которые необходимо распределить между двумя объектами ($t = 2$) на протяжении трех лет ($l = 3$) таким образом, чтобы суммарный доход на всех этапах и всех объектах был максимальным. Функции дохода и остатка для всех этапов одинаковы и определяются следующими аналитическими зависимостями.

Функции дохода:

$$\text{для объекта 1 } f_1 = 0,8x_{1j};$$

$$\text{для объекта 2 } f_2 = 0,5x_{2j}.$$

Функции остатка:

$$\text{для объекта 1 } a_1 = 0,3x_{1j};$$

$$\text{для объекта 2 } a_2 = 0,6x_{2j},$$

где j - номер этапа; x_{1j} и x_{2j} - искомые значения ресурсов.

182

Решение задачи оптимального распределения ресурсов начинаем с последнего, III этапа, предполагая, что к началу этапа имеются ресурсы % истинная величина которых неизвестна.

Моделирование транспортных процессов

В соответствии с принципом оптимальности, какие бы решения ни были приняты на первых двух этапах и какое бы количество ресурсов K_3 не было получено вследствие этого к началу III этапа, мы должны это количество ресурсов использовать наилучшим образом и получить за один последний год наибольший доход. Математически это условие может быть записано следующим образом:

$$F_3 = f_1(x)_{13} + f_2(x)_{23} \rightarrow \max;$$

$$x_{13} + x_{23} = K_3 \text{ при } x_{13} \geq 0; x_{23} \geq 0.$$

После подстановки $f_1(x)_{13}$ и $f_2(x)_{23}$ из условий задачи получим:

$$F_3 = 0,8x_{13} + 0,5x_{23} \rightarrow \max;$$

$$x_{13} + x_{23} = K_3;$$

$$x_{13} \geq 0; x_{23} \geq 0.$$

Решить задачу на данном этапе довольно просто. В целевую функцию x_{13} входит с коэффициентом 0,8, большим, чем коэффициент 0,5 при x_{23} . Следовательно, чтобы максимизировать функцию F_3 , необходимо принять:

$$x_{13} = K_3;$$

$$x_{23} = 0.$$

Тогда $\max F_3 = 0,8K_3$

Такое решение означает, что распределяемые ресурсы K_3 следует вложить в объект 1. Полученное решение является условным, поскольку истинное значение ресурсов K_3 пока неизвестно.

Ресурсы K_3 являются остатком ресурсов в конце второго этапа

$$K_3 = a_1(x)_{12} + a_2(x)_{22}.$$

Если подставить значения функций остатка из условия задачи, то получим

$$K_3 = 0,3x_{12} + 0,6x_{22}.$$

Найдем значение дохода $\max F_3$ через ресурсы II этапа % подставив в полученное решение значение K_3 ,

$$\max F_3 = 0,8K_3 = 0,8(0,3x_{12} + 0,6x_{22})$$

или окончательно

$$\max F_3 = 0,24x_{12} + 0,48x_{22}.$$

183

Далее перейдем к максимизации дохода на двух этапах (II и III): $F_{2+3} =$

$$F_{2+3} = F_2 + \max F_3 \rightarrow \max$$

$$\text{при } x_{12} + x_{22} = K_2;$$

$$x_{12} \geq 0; x_{22} \geq 0.$$

Подставив значения K_3 и функций дохода из условий задачи^ получим

$$F_{2+3} = 0,8x_{12} + 0,5x_{22} + 0,24x_{12} + 0,48x_{22} \rightarrow \max$$

или

$$F_{2\div 3} = 1,04x_{12} + 0,98x_{22} \rightarrow \max$$

при условиях

$$x_{12} + x_{22} = K_2;$$

$$x_{12} \geq 0; x_{22} \geq 0.$$

Коэффициент при x_{12} в целевой функции больше коэффициента при x_{22} . Следовательно $\max F_{2\div 3}$ будет при $x_{12} = K_2$, $x_{22} = 0$, т.е. ресурсы K_2 необходимо направить на объект 1. При этом $\max F_{2\div 3} = 1,04K_2$.

Выразим ресурсы K_2 через ресурсы I этапа. Поскольку ресурсы K_2 являются остатком ресурсов I этапа, то

$$K_2 = a_1(x_{11}) + a_2(x_{21}),$$

или

$$K_2 = 0,3x_{11} + 0,6x_{21}.$$

Запишем полученное на II этапе решение $\max F_{2\div 3} = 1,04K_2$ через ресурсы на I этапе K_1 . Подставив значение K_2 , получим:

$$\max F_{2\div 3} = 1,04(0,3x_{11} + 0,6x_{21}) = 0,312x_{11} + 0,624x_{21}.$$

Функция суммарного дохода на трех этапах:

$$F_{1\div 3} = f_1(x_{11}) + f_2(x_{21}) + \max F_{2\div 3}.$$

Эту функцию необходимо максимизировать:

$$F_{1\div 3} = f_1(x_{11}) + f_2(x_{21}) + \max F_{2\div 3} \rightarrow \max$$

при

$$x_{11} + x_{21} = K_1;$$

$$x_{11} \geq 0; x_{21} \geq 0.$$

184

Таблица 6.10

Объект	Этап		
	I	II	III
1	$x_{11} = 0$	$x_{12} = K_2$	$x_{13} = K_3$
2	$x_{21} = K_1$	$x_{22} = 0$	$x_{23} = 0$

После подстановки функций дохода и значения \max получим: $F_{1\div 3} =$

$$F_{1\div 3} = 0,8x_{11} + 0,5x_{21} + 0,312x_{11} + 0,624x_{21},$$

или

$$F_{1\div 3} = 1,112x_{11} + 1,124x_{21} \rightarrow \max$$

при

$$x_{11} + x_{21} = K_1;$$

$$x_{11} \geq 0; x_{21} \geq 0.$$

Максимального значения функция F^* достигает при $x_2 = 0$; $x_1 = a$ именно $\max F^* = 1,124/C_j$.

Это значит, что ресурсы K_1 следует направить на объект 2. Полученное решение (табл. 6.10) соответствует условно оптимальному распределению ресурсов, поскольку, как уже отмечалось, неизвестно истинное значение ресурсов K_2 и K_3 .

На II этапе решения, следуя от начала процесса к концу, устанавливаем действительно оптимальные распределения ресурсов и определяем доход.

На I этапе все ресурсы направлены на объект 2. Величина начального ресурса задана и составляет $K_1 = 10$ ед. Получаемый доход определяет функция

$$F_1 = 0,8x_{11} + 0,5x_{21}.$$

После подстановки в нее значений, приведенных в табл. 6.10, получим

$$F_1 = 0,8 \cdot 0 + 0,5K_1 = 0,5 \cdot 10 = 5 \text{ ед.}$$

При этом к началу II этапа (года) остаток капитальных вложений составит ,

$$K_2 = 0,3x_{11} + 0,6x_{21} = 0,3 \cdot 0 + 0,6 \cdot 10 = 6 \text{ ед.}$$

На II этапе капитальные вложения направляют на объект 1 (*j₂³⁸ = они обеспечат доход

$$F_2 = 0,8x_{12} + 0,5x_{22} = 0,8K_2 + 0,5 \cdot 0 = 0,8 \cdot 6 = 4,8 \text{ ед.}$$

Остаток ресурсов составит

$$K_3 = 0,3x_{12} + 0,6x_{22} = 0,3 \cdot 6 + 0,6 \cdot 0 = 1,8 \text{ ед.}$$

На III этапе 1,8 ед. ресурсов направляют на объект 1 = K_3 (см. табл. 6.10)). Такое распределение ресурсов обеспечит доход

$$F_3 = 0,8x_{13} + 0,5x_{23} = 0,8K_3 + 0,5 \cdot 0 = 0,8 \cdot 1,8 = 1,44 \text{ ед.}$$

Остаток неиспользованных ресурсов составит

$$K_4 = 0,3x_{13} + 0,6x_{23} = 0,3K_3 + 0,6 \cdot 0 = 0,3 \cdot 1,8 = 0,54 \text{ ед.}$$

Максимальный суммарный доход

$$\max F_{1+3} = \max F_1 + \max F_2 + \max F_3 = 5 + 4,8 + 1,44 = 11,24 \text{ ед.}$$

Поскольку решение I этапа является решением всей задачи, то значение общего дохода должно быть равно значению дохода на I этапе. Проверим, $\max F_{1+3} = 1,124/C_j$ $K_1 = 10$, следовательно, $\max F_{1+3} \approx 11,24$ ед. Задача решена верно.

Контрольные вопросы:

1. Характеристика метода динамического программирования.
2. Формулировка задач, решаемых методом динамического программирования.

Моделирование транспортных процессов

3. Наиболее типичные задачи динамического программирования.
4. Отличительные свойства задач динамического программирования.
5. Существо принципа оптимальности.
6. Исключение из принципа оптимальности.
7. Достоинство динамического программирования.
8. Недостатки метода динамического программирования.

Лекция 12. Корреляционно-регрессионные методы анализа и планирования

Вопросы лекции:

1. Производственные функции
2. Парная корреляция

Вопрос 1. Производственные функции

Экономические явления и процессы на автомобильном транспорте есть результат действия многочисленных и разнообразных факторов: существенных и несущественных, главных и второстепенных, случайных и неслучайных и т. п. Для объективного изучения результатов хозяйственной деятельности автотранспортных предприятий необходимо знать, как влияют те или иные факторы на результат производства. Решают такие задачи путем построения и исследования производственных функций. Правильное определение производственных функций позволяет принять оптимальное решение по использованию различных производственных факторов в организации работы автомобильного транспорта.

Производственная функция представляет собой экономико-математическое выражение зависимости результатов производственной деятельности от обусловивших эти результаты показателей - факторов. Факторы, включаемые в производственные функции, неоднородны по структуре и часто проявляются неоднозначно. Поэтому большинство производственных функций относится к классу статистических моделей, исследуемых методами корреляции и регрессии.

Математическая модель производственной функции обычно описывается уравнением

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

где x_1, x_2, \dots, x_n — показатели-факторы (затраты труда и средств, технико-экономические показатели работы АТП, характеристики уровня организации труда и т. п.).

Самым простым видом производственной функции является прямолинейная зависимость между двумя переменными

$$y = a + bx.$$

Такая зависимость имеет место при равномерном изменении значения функции в связи с изменением изучаемого фактора-аргумента.

Моделирование транспортных процессов

В экономике в качестве производственных функций широко применяют также одно- и многофакторные зависимости, описываемые Уравнениями гиперболы, параболы, степенными и показательными уравнениями.

Часто применяемыми производственными функциями являются Функции издержек, производства, капитальных затрат и др. Функции производства отражают зависимость между выпуском продукции и

193

затратами ресурсов. Функции издержек - зависимость издержек производства какой-либо продукции от объема выпуска этой продукции (например, себестоимость автомобильных перевозок от их объема) или от уровня специализации предприятия, объема и структуры производственных фондов, производительности труда. Известную аналогию с функциями издержек имеют производственные функции капитальных затрат. С помощью производственных функций исследуют и другие экономические показатели производства, например производительность труда, фондоотдачу, рентабельность производства и др.

Рассмотрим процесс исследования производственных функций на примере функции выпуска. Выпуск продукции в зависимости от факторов производства достаточно хорошо описывает степенная функция вида

$$y = a_0 x_1^{a_1} x_2^{a_2} \dots x_n^{a_n},$$

которая преобразуется в линейно-логарифмическую функцию

$$\log y = \log a_0 + a_1 \log x_1 + a_2 \log x_2 \dots a_n \log x_n.$$

Переход к линейно-логарифмической функции намного упрощает расчеты по определению параметров $\% \text{ в } |, a_n$. При этом требуется лишь немного больше вычислений, чем при расчете простейшего линейного уравнения. Вместе с тем линейно-логарифмическая функция, как криволинейная, позволяет лучше отразить характер связи между изучаемыми признаками, чем уравнение прямолинейной зависимости.

Одними из первых функцию такого вида в 1928 г. использовали ученые-экономисты К. Кобб и П. Дуглас при анализе экономики Соединенных Штатов. Они пытались установить влияние соотношения затрат на рабочую силу, с одной стороны, и влияния капитала, с другой, на рост национального дохода. В этих исследованиях была применена функция следующего вида (такие производственные функции часто называют функциями типа Кобба- Дугласа):

$$y = a_0 M^{a_1} K^{a_2},$$

где y — национальный доход; a_0, a_1, a_2 — параметры уравнения; M — фонд заработной платы; K — имеющиеся в наличии основные фонды (т. е. "капитал").

где y — национальный доход; a_0, a_1, a_2 — параметры уравнения; M — фонд заработной платы; K — имеющиеся в наличии основные фонды (т. е. "капитал").

Функция типа Кобба- Дугласа имеет важное аналитическое значение не только в изучении развития национальной экономики, но и в изучении деятельности предприятий, что представляет большой интерес.

Условимся, что результат производства, обозначенный y , будет представлять продукцию предприятия; M - фонд заработной платы

194'

Моделирование транспортных процессов

или число рабочих, а K - основные фонды предприятия. Логарифмированное уравнение

$$\log y = \log a_0 + a_1 \log M + a_2 \log K$$

служит для вычисления параметров a_1 и a_2 методом наименьших квадратов. При этом предполагаем, что $a_1 + a_2 = 1$.

Исследуем заданную производственную функцию. Прежде всего определим показатель производительности труда как отношение объема выпускаемой продукции к численности рабочих

Полученное выражение характеризует среднюю производительность труда, т. е. показывает среднее количество продукции, приходящееся на одного работника или на единицу отработанного времени. Поскольку параметр находится в интервале от нуля до единицы, т. е. $0 < a_1 < 1$, то показатель степени $(a_1 - 1)$ при M в правой части уравнения является отрицательной величиной, а это значит, что с увеличением затрат труда (величины M) средняя производительность труда снижается.

Предельная производительность труда - есть частная производная выпуска продукции по затратам труда

$$dy/dM = a_0 a_1 M^{a_1-1} K^{a_2}$$

и показывает, сколько дополнительных единиц продукции приносит дополнительная единица затраченного труда. С увеличением затрат труда M при неизменных фондах K предельная производительность труда снижается. С увеличением объема фондов при неизменных трудовых ресурсах, т. е. с ростом фондовооруженности труда, производительность труда возрастает.

По основным фондам интерпретируем аналогичным образом. Средний выпуск продукции, приходящийся на единицу основных фондов, т. е. средняя фондоотдача определяется так:

$$y/K = a_0 M^{a_1} K^{a_2-1}.$$

Из полученного выражения следует, что средняя фондоотдача уменьшается с ростом объема основных фондов и увеличивается с ростом ресурсов труда.

Показатель предельной фондоотдачи определяется как частная производная по объему фондов

$$dy/dK = a_0 a_2 M^{a_1} K^{a_2-1}.$$

Относительный прирост объема производства на единицу относительного увеличения ресурсов определяется следующим образом.

195'

Предельную производительность труда и предельную фондоотдачу необходимо разделить на объем продукции и умножить на величину ресурсов (трудовых затрат и основных фондов). Тогда относительная предельная производительность труда определяется:

$$\frac{dy}{dM} \cdot \frac{M}{y} = \frac{a_0 a_1 M^{a_1} K^{a_2}}{a_0 M^{a_1} K^{a_2}} = a_1.$$

Относительная предельная фондоотдача:

$$\frac{dy}{dK} \cdot \frac{K}{y} = \frac{a_0 a_2 M^{a_1} K^{a_2}}{a_0 M^{a_1} K^{a_2}} = a_2.$$

Параметры a_1 и a_2 представляют собой в сущности эластичность выпуска продукции соответственно по затратам труда и основных фондов. Параметр a_1 показывает, насколько увеличивается выпуск продукции при росте затрат труда на 1 %, а параметр a_2 - насколько увеличится выпуск продукции при увеличении затрат фондов на 1 %. Как видим, относительная предельная производительность труда и относительная предельная фондоотдача от объемов ресурсов не зависят, и при любом их сочетании увеличение трудовых затрат на 1 % приводит к росту объема производства на a_1 %, а увеличение затрат фондов на 1 % приводит к увеличению выпуска продукции на a_2 %. Следовательно, эластичность выпуска по затратам труда и фондам есть величина постоянная, равная соответственно a_1 и a_2 . Этот вывод относится! только к рассматриваемой производственной функции.

Производственные функции позволяют исследовать также вопросы замещения и взаимодействия ресурсов. Замещение ресурсов означает, что единицу одного ресурса можно было бы заменить некоторым количеством другого ресурса так, что объем продукции при этом не изменится. В экономических исследованиях важно знать предельную норму замещения. Для производственных функций типа Кобба-Дугласа она равна

$$\frac{dK}{dM} = - \frac{a_1 K}{a_2 M}.$$

Предельная норма замещения зависит не только от параметров a_1 и a_2 , но и от соотношения объемов ресурсов. Чем выше, например, фондовооруженность труда, тем выше норма замещения затрат живого труда производственными фондами. Для того чтобы учесть соотношение объемов ресурсов, вычисляют показатель эластичности замещения ресурсов. В данном конкретном случае эластичность замещения определяется как отношение относительных приращений K/M (фондовооруженности труда) и предельной нормы замещения. Обозначив $dK/dM = h$, получим выражение для эластичности замещения ресурсов:

$$\frac{d(K/M)}{dh} \cdot \frac{h}{K/M} = 1.$$

Таблица 12.1

Название функции	Уравнение $y = f(x)$	Средняя производительность $(\frac{y}{x})$	Предельная производительность $(\frac{dy}{dx})$	Коэффициент эластичности $E = \frac{dy}{dx} \frac{x}{y}$
Линейная	$y = a + bx$	$\frac{a}{x} + b$	b	$\frac{bx}{a + bx}$
Парабола	$y = a + bx + cx^2$	$\frac{a}{x} + b + cx$	$b + 2cx$	$\frac{(b + 2cx)x}{a + bx + cx^2}$
Гипербола	$y = a + \frac{b}{x}$	$\frac{a}{x} + \frac{b}{x^2}$	$-\frac{b}{x^2}$	$-\frac{b}{ax + b}$
Степенная	$y = ax^b$	ax^{b-1}	abx^{b-1}	b
Показательная	$y = ab^x$	$\frac{ab^x}{x}$	$ab^x \ln b$	$x \ln b$
Экспоненциальная	$y = ae^{bx}$	$\frac{ae^{bx}}{x}$	abe^{bx}	bx

Эластичность замещения ресурсов в рассматриваемой производственной функции постоянна и равная единице. Это значит, что изменение фондовооруженности труда (К/М) на 1 % соответствует изменению предельной нормы замещения тоже на 1 %.

Исследуя производственные функции, можно получить и другие их характеристики. Например, эффект от одновременного пропорционального увеличения объема как ресурса труда, так и производственных фондов или определить потребность в одном из ресурсов при заданных объеме производства и величине другого ресурса и т. п.

При выборе вида производственной функции следует исходить из существа исследуемого явления, характера факторов-аргументов, учитывать закономерности изменения средних и предельных ресурсов, норм замещения и коэффициентов эластичности. В табл. 7.1 представлены часто применяемые производственные функции, отражающие однофакторные зависимости и основные их характеристики.

Вопрос 2. Парная корреляция

Все явления в природе и обществе взаимосвязаны и обусловлены действием многих причин и факторов. При изучении причинно-следственных связей в области организации автомобильного транспорта многие из них описывают функциональные или корреляционные зависимости.

197

Функциональная зависимость - это такая связь между величинами, когда значение зависимой величины-функции полностью определяется значениями влияющих величин-аргументов. Здесь наблюдаются полное соответствие между зависимыми и независимыми величинами. Например, путь, пройденный автомобилем, всегда зависит от скорости, с которой он будет двигаться, и времени движения.

Моделирование транспортных процессов

Это условие будет соблюдаться независимо от того, какие перевозки выполняются, какой груз перевозится и какими автомобилями.

Корреляционная зависимость отражает связь между величинами, когда определенным значениям влияющих величин соответствует много значений зависимой величины. В корреляционной зависимости нет полного соответствия между причиной и следствием, а наблюдается лишь известное соотношение - корреляция (в переводе с латинского означает соответствие, взаимосвязь). Корреляционная связь проявляется лишь в общей совокупности наблюдений и может быть выявлена статистическим путем. Так, корреляционная связь имеет место между производительностью труда и фондовооруженностью рабочих, производительностью и текучестью рабочих. Это значит, что один и тот же прирост производительности труда не обязательно сопровождается одинаковым увеличением его фондовооруженности или одним и тем же снижением текучести и т. д.

Основным содержанием метода корреляционного анализа является изучение причинно-следственных связей, построение математических моделей зависимости одних величин от других, количественная характеристика связи и определение ее значимости.

Корреляционные методы обнаруживают и характеризуют фактическое проявление связи на основе изучения опыта работы и особенностей производства, количественного измерения связи, что имеет большое практическое значение в области планирования и организации автотранспортного производства.

Необходимым условием применения корреляционных методов является предварительный качественно-теоретический анализ существа изучаемого процесса или явления. Именно теоретический анализ указывает на вытекающие из существа явлений возможности причинно-следственной связи между ними. Корреляционный анализ должен дать ответ на вопрос: проявляется ли в действительности и как проявляется, воспроизводится возможная связь в данных конкретных условиях?

Корреляционный анализ включает следующие основные этапы:

установление наличия корреляционной связи между изучаемыми явлениями, вскрытие внутренней сущности явлений и порождающих их причин;

определение формы связи и исчисление ее количественной характеристики, то есть построение корреляционной модели в виде уравнения связи и нахождение его: параметров;

измерение степени тесноты корреляционной связи и исчисление ее количественных показателей и оценок.

198

Корреляционная связь между двумя признаками изучается с помощью методов парной корреляции. Простейшим уравнением, описывающим зависимость между двумя переменными, является линейное уравнение

$$\bar{y} = a + bx.$$

Построение линейной корреляционной однофакторной модели рассмотрим на конкретном примере. Допустим, что мы располагаем данными о выработке транспортной продукции в расчете на одного рабочего в приведенных тонно-километрах (производительность труда) и показателями о текучести рабочей силы (коэффициент текучести) по 34 грузовым автотранспортным предприятиям (табл. 7.2).

Таблица 7.2

№ п/п	Коэффициент текучести, %, x_i	Производительность труда, тыс. при- веденных т-км, y_i	Расчетные показатели		
			yx	x^2	y^2
1	21,8	143,3	3123,9	475,2	20534,9
2	23,3	110,9	2583,9	542,9	12298,8
3	26,0	123,0	3198,0	676,0	15129,0
4	27,0	117,0	3159,0	729,0	13689,0
5	29,3	129,4	3791,4	858,5	16744,4
6	38,0	115,4	4385,2	1444,0	13317,2
7	38,0	112,9	4290,2	1444,0	12746,4
8	38,0	108,4	4119,2	1444,0	11750,6
9	38,0	129,4	4917,2	1444,0	16744,0
10	38,5	145,3	5594,1	1482,3	21112,1
11	40,0	141,1	5644,0	1600,0	19909,2
12	42,0	128,5	5397,0	1764,0	16512,3
и т. д.
34	79,0	98,5	7781,5	6241,0	9702,3
$\Sigma x = 1675,2$			$\Sigma yx =$	$\Sigma x^2 = 90414,6$	$\Sigma y^2 =$
$\bar{x} = 49,3$			-186837,7		-447927,4
$\Sigma y = 3876,5$					
$\bar{y} = 114,0$					

Примечание. Из-за громоздкости вся таблица не приводится, показан только ее фрагмент.

Примечание. Из-за громоздкости вся таблица не приводится, показан только ее Фрагмент.

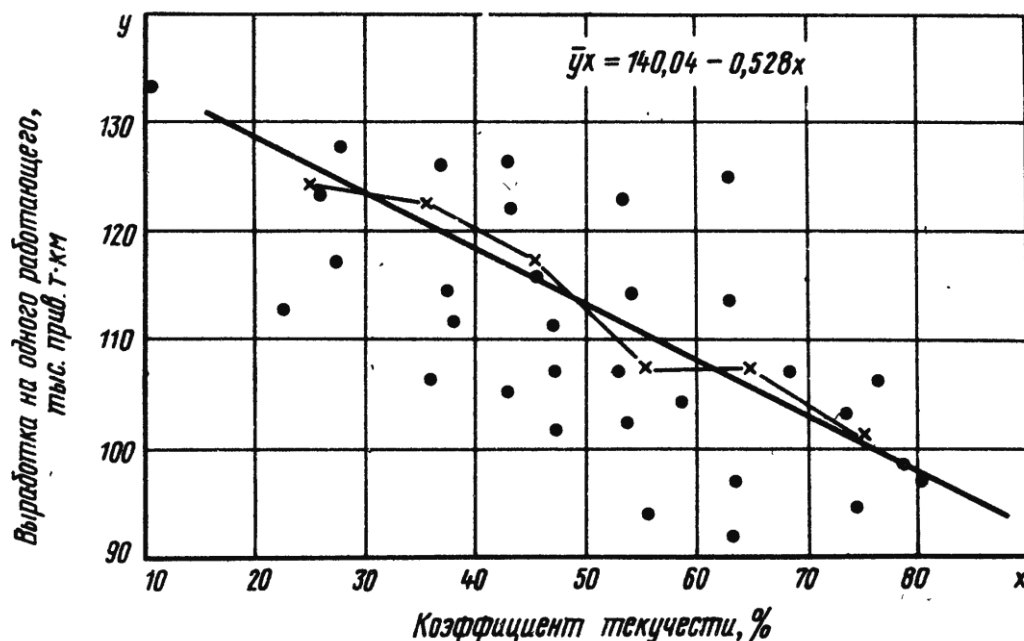


Рис.7.1. График корреляционной связи между производительностью труда и коэффициентом текучести рабочей силы

Данные в табл. 7.2 расположены в порядке возрастания признака- фактора, т. е. коэффициента текучести рабочих. Даже из приведенного фрагмента таблицы видно, что с ростом показателя текучести кадров наблюдается тенденция к снижению производительности труда. Такой вывод вытекает исходя из, сути изучаемой связи, поскольку известно, что увеличение текучести рабочих отрицательно сказывается на их производительности. Следовательно, предварительно можно предположить наличие корреляционной связи между изучаемыми показателями.

Корреляционным анализом необходимо установить, имеется ли такая связь на самом деле, а также ее вид и количественные характеристики. Для этого нанесем все 34 точки из таблицы на график (рис. 7.1). Абсциссой точки является коэффициент текучести (обозначим его через x) ординатой - значение показателя производительности труда (обозначим ее через y). Такой график называется полем корреляции.

Для выяснения характера предполагаемой связи в каждом интервале по коэффициенту текучести вычислены средневзвешенные значения показателей производительности труда, которые соединены на графике ломаной линией. Эта линия называется эмпирической линией регрессии. По характеру ее расположения определяют вид корреляционной связи. На графике (см. рис. 7.1) эмпирическая линия регрессии имеет незначительную кривизну и расположена на поле корреляции так, что можно предположить линейную форму связи между производительностью труда автотранспортных рабочих и их текучестью, которая описывается уравнением прямой вида $y_x = a + bx$.

Описать корреляционную линейную зависимость математически - значит определить численные значения параметров a и b , при которых прямая будет наилучшим образом соответствовать имеющимся фактическим данным. А это значит, что она должна проходить в максимальной близости к ломаной линии, представляющей эмпирические данные. Такая линия называется теоретической линией регрессии и характеризует зависимость между y_x и x при средних значениях, кроме x факторов, т. е. при средних прочих условиях.

Задача нахождения уравнения теоретической линии регрессии может решаться различными методами. Один из них - метод наименьших квадратов. При этом методе за критерий оценки принята минимальная сумма квадратов отклонений фактических значений y (точек ломаной Линии) от вычисленных по уравнению прямой. Отклонения берут в квадрате, так как в первой степени они могут быть либо положительными, либо отрицательными, а их сумма равна нулю для многих прямых. Минимум же квадратов отклонений соответствует единственная прямая.

Таким образом, необходимо определить такие значения коэффициентов a и b , при которых сумма квадратов отклонений наблюдае-

мых значений y от расчетных будет минимальной, т. е. $s = \sum_{i=1}^n (\bar{y}_i - \bar{y}_x)^2 \rightarrow \min$.

Подставив выражение $\bar{y}_x = a + bx_i$, получим

$$s = \sum_{i=1}^n (y_i - a - bx_i)^2 \rightarrow \min,$$

где x_i, y_i – известные величины (исходные данные); a и b – искомые параметры уравнения линии регрессии; i – порядковый номер исходного показателя; n – общее количество исходных показателей (число наблюдений).

В точке минимума функции ее первая производная равна нулю, поэтому дифференцируем s в отношении a и b , а соответствующие частные производные приравняем нулю:

$$ds/da = -2 \sum (y - a - bx) = 0;$$

$$ds/db = -2 \sum (y - a - bx)x = 0.$$

Опуская обозначения частных производных, сократив на -2 , почленно, просуммировав и перенеся в правую часть члены с коэффициентами a и b , получим систему нормальных уравнений для вычисления параметров a и b :

$$\sum y = na + b \sum x;$$

$$\sum xy = a \sum x + b \sum x^2.$$

201

Решив систему нормальных уравнений, найдем выражения для вычисления a и b :

$$b = \frac{n \sum xy - \sum x \sum y}{n \sum x^2 - (\sum x)^2};$$

$$a = \frac{\sum x^2 \sum y - \sum x \sum xy}{n \sum x^2 - (\sum x)^2}.$$

Следовательно, для расчета коэффициентов уравнения регрессии необходимо иметь значения n ; $\sum x$; $\sum y$; $\sum x^2$. Эти значения приведены в расчетной части табл. 7.2.

Подставив необходимые значения в расчетные выражения, получим:

$$b = \frac{34 \cdot 186837,7 - 1675,2 \cdot 3876,5}{34 \cdot 90414,6 - (1675,2)^2} = \frac{-141431,6}{267801,9} = -0,528;$$

$$a = \frac{90414,6 \cdot 3876,5 - 1675,2 \cdot 186837,7}{34 \cdot 90414,6 - (1675,2)^2} = 140,04.$$

Расчет параметров уравнения регрессии изложенным выше способом становится все более затруднительным с ростом числа наблюдений. Изложим более эффективный способ вычислений, основанный на использовании синтезированной корреляционной таблицы, которая имеет форму табл. 7.3. В ней сохраняются те же интервалы для переменных, что и на поле корреляции (см. рис. 7.1). Вычисления рекомендуется проводить в условных единицах, что особенно эффективно при "ручном" счете.

Чтобы перейти к условным переменным, для каждой из них находят средний интервал. При нечетном числе интервалов средний интервал определяется однозначно; если число интервалов четное, как в нашем случае, то один из

Моделирование транспортных процессов

интервалов условно принимается за средний. Пусть для переменной x за средний принят интервал 3, тогда условные значения переменных определяют так:

$$x' = (x - 45)/10,$$

где 45 - середина среднего интервала; 10 - принятый размер интервала.

В общем случае формулы для расчета условных значений X и y следующие:

$$x' = (x - c_x)/i_x; y' = (y - c_y)/i_y,$$

где c_x, c_y - соответственно средние значения x и y в средних интервалах; x, y - значения соответствующих переменных в расчетных интервалах; i_x, i_y - интервал по переменным x и y .

Таблица 12.3

Интервалы x_i				20-30		30-40		40-50		50-60		60-70		70-80		Допустимые столбцы			
Интервалы y_k	x_i	y_k	x_i'	25		35		45		55		65		75		$l_k = \sum_{k=1}^6 m_{ki}$	$l_k y_k$	$\sum_{k=1}^6 m_{ki} x_i'$	$l_k (y_k')^2$
				-2		-1		0		1		2		3					
				m	mx'	m	mx'	m	mx'	m	mx'	m	mx'	m	mx'				
90-100	95	-2	m							1	1	2	4	2	6	5	-10	11	20
			my'							-2	-2	-4	-4	-2	-4				
100-110	105	-1	m			1	-1	3	0	3	3	2	4	2	6	11	-11	12	11
			my'			-1	-1	-3	-3	-3	-3	-2	-2	-2	-2				
110-120	115	0	m	2	-4	2	-2	2	0	1	1	1	2			8	0	-3	0
			my'		0	0	0	0	0	0	0	0	0						
120-130	125	1	m	2	-4	1	-1	2	0	1	1	1	2			7	7	-2	7
			my'	2	2	1	1	2	2	1	1	1	1						
130-140	135	2	m													-	-	-	-
			my'																

Окончание табл. 12.3

Интервалы x_i				20–30		30–40		40–50		50–60		60–70		70–80		Допустимые столбцы			
Интервалы y_k	x_i	x'_i	y_k	25		35		45		55		65		75		$I_k = \sum_{k=1}^6 m_{k_i}$	$I_k y'_k$	$\sum_{k=1}^6 m_{k_i} x'_i$	$I_k (y'_k)^2$
				m	mx'	m	mx'	m	mx'	m	mx'	m	mx'	m	mx'				
140–150	145	3	m	1	–2		–1		0							3	9	–3	27
			my'		3	1	3	1	3										

Дополнительные строки	$h_i = \sum_{k=1}^6 m_{k_i}$	5	5	8	6	6	4	$n = 34$	–	–	$\Sigma (y')^2 = 65$
	$\sum_{k=1}^6 m_{k_i} y'_k$	5	3	2	–4	–5	–6		$\Sigma y' = -5$		
	$h_i x'_i$	–10	–5	0	–6	12	12			$\Sigma x'_i = 15$	
	$h_i (x')^2$	20	5	0	6	24	36			$\Sigma (x')^2 = 91$	
	$(m_{k_i} y') < x'$	–10	–3	0	–4	–10	–18				

Для переменной x за средний принят интервал 40–50. В среднем интервале значение переменной равно нулю, слева находятся интервалы со значениями 1 и 2 со знаком минус, справа – условные переменные 1, 2 и 3 со знаком плюс.

По переменной y третий интервал принят за средний, для него $y = 0$; вверх расположены условные значения переменной 1, 2 со знаком минус, вниз – значения 1, 2, 3 со знаком плюс. Дальнейшие расчеты ведут в условных переменных. При этом основные клетки таблицы содержат такие показатели (см. табл. 7.3): t — число наблюдений (точек), попавших в данный интервал на поле корреляции; $t x$ — произведение условной переменной x' на значение t в данном интервале; $t y'$ — произведение условной переменной y' на соответствующее значение t в клетке таблицы.

Остальные расчеты понятны из формул дополнительных строк и столбцов табл. 7.3. Принятая форма корреляционной таблицы дает возможность контролировать правильность расчетов, сравнивая значения одних и тех же показателей, но полученных разными способами вычислений.

Значения параметров уравнения регрессии при прямолинейной корреляционной зависимости определяют решением системы нормальных уравнений в условных показателях;

$$\Sigma y' = n a' + b' \Sigma x';$$

$$\Sigma y' x' = a' \Sigma x' + b' \Sigma x'^2,$$

где a' , b' — искомые параметры теоретической линии регрессии в условном выражении; n — число показателей в совокупности (число наблюдений).

Показатели, необходимые для расчетов, имеются в корреляционной таблице:

$$-5 = 34a' + 15b';$$

$$-45 = 15a' + 91b'.$$

Решив систему уравнений, получим $b' = -0,528$, $a = 0,0763$. Следовательно, в условных единицах теоретическая линия регрессии описывается уравнением

$$\bar{y}_x' = 0,0763 - 0,528x'.$$

Чтобы перейти к действительным единицам измерения, необходимо вычислить следующие соотношения:

для параметра b

$$b = b' \frac{i_y}{i_x},$$

205

где i_y - интервал таблицы по производительности, равный 10; i_x - интервал по коэффициенту текучести, равный 10, тогда

$$b = -0,528 \frac{10}{10} = -0,528;$$

для параметра a

$$a = c_y + i_y a' + b c_x,$$

где c_y , c_x - соответственно средние значения производительности и коэффициента текучести в интервале, которому соответствуют нулевые значения условных переменных, т. е. $c_y = 115$; $c_x = 45$;

тогда

$$a = 115 + 10 \cdot 0,0763 + 0,528 \cdot 45 = 140,04.$$

Как видим, получены те же значения параметров a и b , что и при их расчете непосредственно в натуральных показателях. При этом методика расчетов сохраняется, а сами расчеты значительно упрощаются. Добавим также, что показатели корреляционной таблицы используются и в дальнейших расчетах для определения тесноты корреляционной связи и других характеристик корреляционных исследований.

Запишем эмпирическое уравнение, отражающее корреляционную связь между производительностью труда рабочих и их текучестью по исследуемой группе автотранспортных предприятий:

$$\bar{y}_x = 140,04 - 0,528x,$$

где \bar{y}_x - показатель производительности труда, тыс. приведенных т-км; x - коэффициент текучести рабочих, %.

Параметр a отражает максимальную производительность по всей совокупности, т. е. она достигает 140,04 тыс. приведенных т-км в год. Коэффициент регрессии $b = -0,528$ означает, что увеличение текучести на 1 % приводит к снижению выработки одного рабочего на 0,528 тыс. приведенных т-км в год, что составляет примерно 0,5 % от средней выработки.

Моделирование транспортных процессов

Приведем системы нормальных уравнений для расчета параметров в случае гиперболической и параболической корреляционной зависимости.

При гиперболической зависимости вида $y_x \approx a + b/x$ параметры a и b определяют путем решения системы нормальных уравнений:

$$\begin{aligned}\Sigma y &= na + b \Sigma \frac{1}{x}; \\ \Sigma y \frac{1}{x} &= a \Sigma \frac{1}{x} + b \Sigma \frac{1}{x^2}.\end{aligned}$$

206

Если корреляционная связь между показателями описывается уравнением параболы второго порядка $y \approx a + bx + cx^2$ то коэффициенты a , b и c определяют из следующей системы нормальных уравнений:

$$\begin{aligned}\Sigma y &= na + b \Sigma x + c \Sigma x^2; \\ \Sigma yx &= a \Sigma x + b \Sigma x^2 + c \Sigma x^3; \\ \Sigma yx^2 &= a \Sigma x^2 + b \Sigma x^3 + c \Sigma x^4.\end{aligned}$$

Следующим этапом корреляционного анализа является определение степени существенности связи между параметрами.

Контрольные вопросы:

1. Что необходимо знать для объективного изучения результатов хозяйственной деятельности автотранспортных предприятий?
2. Что понимается под производственной функцией?
3. К какому классу относится большинство производственных функций?
4. Математическая модель производственной функции.
5. Самый простой вид производственной функции.
6. Что понимается под функцией издержек?
7. Сущность параметров производственной функции.
8. Из чего исходят при выборе вида производственной функции.
9. Дать понятие корреляционные зависимости.
10. Что понимается под функциональной зависимостью.
11. Что понимается под корреляционной зависимостью.
12. Основное содержание метода корреляционного анализа.
13. Необходимое условие применения корреляционных методов.
14. Основные этапы корреляционного анализа.
15. Что значит описать корреляционную линейную зависимость математически.

Лекция 13. Измерение тесноты корреляционной связи

Вопросы лекции:

1. Измерение тесноты корреляционной связи
2. Основные сведения о множественной и частной корреляции

Вопрос 1. Измерение тесноты корреляционной связи

Однофакторный корреляционно-регрессионный анализ исследует связь, предполагая, что на зависимую переменную воздействует только один изучаемый фактор, а другие остаются неизменными. Поэтому, чтобы использовать полученную зависимость для изучения свойств и закономерностей экономического явления, необходимо знать тесноту связи между признаками и установить силу воздействия изучаемого фактора на независимую переменную величину.

При парной линейной корреляционной зависимости теснота связи характеризуется специальным показателем - коэффициентом корреляции, который показывает, насколько значим исследуемый фактор в сравнении с другими неучтенными факторами. О тесноте корреляционной связи и влиянии других факторов можно судить по характеру корреляционного поля (*см. рис. 7Л*).

Точки корреляционного поля выражают фактические показатели производительности труда рабочих автотранспортных предприятий, а теоретическая линия регрессии - расчетные ее значения. Отклонение точек поля от линии регрессии объясняется влиянием побочных факторов. Если бы такого влияния не было, то точки находились бы на линии регрессии. Вместе с тем как эмпирические, так и теоретические значения отклоняются от средней арифметической. Отсюда очевидно, что чем больше разброс эмпирических значений (точек), тем больше влияние побочных факторов. >

Напомним, что координаты средней арифметической точки на графике определяют из уравнений

$$\bar{y} = \Sigma y/n; \quad \bar{x} = \Sigma x/n.$$

Для рассматриваемого примера $y^{\text{ш}} 144$; $x^{\text{ж}} 49,3$ (эти значения приведены в табл» 7.3).

207

Общая колеблемость значений производительности труда, вызванная действующими на нее факторами, включая и исследуемый (текучесть рабочей силы), характеризуется общей дисперсией σ^2 , которая представляет собой средний квадрат отклонений фактических значений признака y от их средней арифметической.

$$\sigma_y^2 = \Sigma (y - \bar{y})^2/n.$$

Колеблемость фактических значений около теоретической линии регрессии, вызванная влиянием других факторов, кроме коэффициента текучести, характеризуется дисперсией $\sigma_{\text{Л}}^2$ или средним квадратом отклонений фактических значений результативного признака от теоретических, рассчитанных по уравнению регрессии

$$\delta^2_{y/x} = \Sigma(y - \bar{y}_x)^2/n.$$

Отклонения расчетных значений производительности труда, вызванные непосредственно изменением показателя текучести рабочих, характеризуются дисперсией $\sigma^2_{y/x}$ точек теоретической линии регрессии вокруг средней арифметической:

$$\sigma^2_{y/x} = \Sigma(\bar{y}_x - \bar{y})^2/n.$$

Общая дисперсия соответствует сумме частных дисперсий

$$\sigma^2_y = \sigma^2_{y/x} + \delta^2_{y/x}$$

Следовательно, чем теснее корреляционная связь между результативным признаком y и исследуемым фактором x , тем больше дисперсия $\sigma^2_{y/x}$ будет стремиться к значению общей дисперсии, а частная дисперсия $\delta^2_{y/x}$ будет стремиться к нулю.

Следовательно, отношение Q_y/J_0^* показывает, какая часть общей вариации результативного признака y обусловлена влиянием фактора- аргумента x . Количественно теснота связи для однофакторной прямо* линейной и криволинейной корреляционной зависимости определяется корреляционным отношением, которое показывает, в какой мере соблюдается строгая функциональная зависимость между переменными x и y .

Корреляционное отношение рассчитывают

$$\eta = \sqrt{\delta^2_{y/x}/\sigma^2_y} = \delta_{y/x}/\sigma_y.$$

где $\delta_{y/x}$ – среднее квадратичное отклонение теоретических значений y , вычисленных по уравнению регрессии, от средней арифметической; σ_y – среднее квадратичное отклонение фактических значений y от средней арифметической.

При прямолинейной связи между показателями корреляционное
208

отношение соответствует коэффициенту корреляции, для расчета которого используют формулу

$$r_{y/x} = \frac{n \Sigma xy - \Sigma x \Sigma y}{\sqrt{n \Sigma x^2 - (\Sigma x)^2} \sqrt{n \Sigma y^2 - (\Sigma y)^2}}.$$

При парной линейной корреляционной зависимости коэффициент корреляции имеет или положительный, или отрицательный знак. При прямо пропорциональной зависимости $r_{y/x}$ он положителен, при обратно пропорциональной - отрицателен. При этом следует отметить, что коэффициент регрессии в уравнении связи и коэффициент корреляции имеют одинаковые знаки. Числовое значение коэффициента корреляции меняется в пределах от -1 до +1. Если $r_{y/x} = 0$, то это указывает на то, что никакой связи между признаками нет; если $r_{y/x} = \pm 1$ (с любым знаком), то между признаками существует функциональная связь. Обычно считают тесноту связи удовлетворительной при $r_{y/x} > 0,4$. Теснота связи зависит от коэффициента корреляции следующим образом:

Моделирование транспортных процессов

Коэффициент корреляции	Теснота связи
0,1-0,3	слабая
0,3-0,5	умеренная
0,5-0,7	заметная
0,7-0,9	высокая
0,9-0,99	весьма высокая

Что касается корреляционного отношения, рассчитанного при криволинейной корреляционной зависимости, то оно меняется от 0 до 1. При отсутствии связи оно равно нулю, при полной функциональной зависимости - единице. В отличие от коэффициента корреляции корреляционному отношению не придают знака, поскольку кривая зависимости имеет разный наклон. Кроме характеристики тесноты связи, корреляционное отношение может быть использовано при обосновании формы связи путем сравнения его значения со значением коэффициента корреляции. Если корреляционное отношение для исследуемой совокупности окажется значительно больше коэффициента корреляции, вычисленного для этой же совокупности, то это будет свидетельствовать о том, что кривая точнее отражает зависимость между признаками по сравнению с прямолинейной зависимостью.

Рассчитаем коэффициент корреляции для зависимости выработки одного рабочего от показателя текучести кадров по данным 34 автотранспортных предприятий (см. табл. 7.2):

$$r_{y/x} = \frac{34 \cdot 186837,7 - 1675,2 \cdot 3876,5}{\sqrt{34 \cdot 90414,6 - (1675,2)^2} \sqrt{34 \cdot 447927,4 - (3876,5)^2}} = -0,61.$$

209

Его числовое значение и отрицательный знак указывают на то, что между исследуемыми признаками наблюдается заметная (см. табл. 7.4) обратная связь.

Как видим, расчет коэффициента корреляции в действительных показателях, даже при малом числе наблюдений, требует большой вычислительной работы. При большом количестве наблюдений объем расчетов значительно возрастает, и в этом случае коэффициент корреляции целесообразно определять в условных единицах. При этом методика расчетов остается прежней, но оперировать приходится простыми значениями чисел. Та же расчетная формула в условных показателях примет вид

$$r_{y/x} = \frac{n \sum x'y' - \sum x' \sum y'}{\sqrt{n \sum x'^2 - (\sum x')^2} \sqrt{n \sum y'^2 - (\sum y')^2}} .$$

Необходимые для расчетов показатели содержатся в синтезированной корреляционной таблице (см. табл. 7.3). Выполним необходимый расчет:

$$r_{y/x} = \frac{34(-45) - 15(-5)}{\sqrt{34 \cdot 91 - 15^2} \sqrt{34 \cdot 65 - (-5)^2}} = -0,61.$$

Квадрат коэффициента корреляции называют коэффициентом детерминации. Он, так же как и квадрат теоретического корреляционного отношения, показывает, какая часть вариации результативного признака вызвана влиянием

Моделирование транспортных процессов

фактора, включенного в анализ. В рассматриваемом примере коэффициент детерминации составит $r^2/x = (-0,61)^2 = 0,372$, или 37,2 %. Следовательно, на рассматриваемых автотранспортных предприятиях 37,2 % вариации выработки на одного рабочего обусловлено изменением уровня текучести кадров.

Методика измерения тесноты связи показателей при множественной и частной корреляции изложена в п. 7.4.

Вопрос 2. Основные сведения о множественной и частной корреляции

В моделях множественной корреляции зависимая переменная рассматривается как функция не одной, а нескольких независимых переменных:

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

При множественной корреляции выбор уравнения связи намного сложнее, чем при парной корреляции, поскольку действие разнообразных факторов имеет различный характер и, как правило, отсутствует возможность графического контроля. Поэтому еще большее

210

значение приобретает качественный анализ связи каждого из факторов с зависимой переменной.

В корреляционном анализе часто применяется двухфакторное уравнение множественной регрессии, геометрически отражающее плоскость

$$y_{xz} = a + bx + cz,$$

где a, b, c — неизвестные параметры уравнения.

Параметры двухфакторного уравнения множественной корреляции определяют из условия наименьших квадратов, которое требует, чтобы минимизировалось выражение

$$\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_{xz})^2,$$

где n — количество наблюдений; i — порядковый номер наблюдений; y_i — фактические значения результативного признака; \hat{y}_{xz} — расчетные значения результативного признака, вычисленные по уравнению регрессии.

Затем необходимо последовательно приравнять нулю частные производные уравнения наименьших квадратов по коэффициентам a, b, c . После преобразования будет получена система трех нормальных уравнений для определения коэффициентов множественной регрессии a, b, c . Эта система уравнений имеет следующий вид:

$$\sum y = na + b \sum x + c \sum z;$$

$$\sum yx = a \sum x + b \sum x^2 + c \sum xy;$$

$$\sum yz = a \sum y + b \sum xy + c \sum y^2.$$

В общем случае линейное уравнение множественной корреляции для l факторов записывается так:

$$\hat{y}_x = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n.$$

Моделирование транспортных процессов

Используя принцип наименьших квадратов, получим систему нормальных уравнений для расчета коэффициентов регрессии a_0, a_1, \dots, a_n :

$$\Sigma y = na_0 + a_1 \Sigma x_1 + a_2 \Sigma x_2 + \dots + a_n \Sigma x_n;$$

$$\Sigma yx_1 = a_0 \Sigma x_1 + a_1 \Sigma x_1^2 + a_2 \Sigma x_1 x_2 + \dots + a_n \Sigma x_1 x_n;$$

$$\Sigma yx_2 = a_0 \Sigma x_2 + a_1 \Sigma x_1 x_2 + a_2 \Sigma x_2^2 + \dots + a_n \Sigma x_2 x_n;$$

.....

$$\Sigma yx_n = a_0 \Sigma x_n + a_1 \Sigma x_1 x_n + a_2 \Sigma x_2 x_n + \dots + a_n \Sigma x_n^2.$$

211

Коэффициенты регрессии имеют определенный смысл, играющий важное значение в экономико-математическом анализе. Например, коэффициент df_j в системе нормальных уравнений отвечает на вопрос, на сколько единиц в среднем меняется y если фактор x_j изменить на единицу при условии, что другие факторы x_2, \dots, x_n сохраняют постоянные значения.

Теснота корреляционной связи между зависимой переменной y и независимыми переменными x_1, x_2, \dots, x_n измеряется с помощью коэффициента множественной корреляции:

$$R_{yx_1, x_2, \dots, x_n} = \sqrt{1 - \frac{\Sigma(y - \bar{y}_{x_1, x_2, \dots, x_n})^2}{\Sigma(y - \bar{y})^2}},$$

где $\Sigma(y - \bar{y}_{x_1, x_2, \dots, x_n})^2$ – дисперсия фактических значений признака y от теоретических ее значений, рассчитанных по уравнению множественной регрессии; $\Sigma(y - \bar{y})^2$ – общая дисперсия фактических значений признака y от их средней арифметической.

По абсолютному значению коэффициент множественной корреляции изменяется от 0 до 1. Определенного знака он не имеет, так как показатели-факторы могут по-разному влиять на зависимую переменную, т. е. с одними факторами корреляция может быть положительной, с другими - отрицательной или знакопеременной.

Коэффициент множественной корреляции зависит от отношения между рассеянием значений, определенных на основе уравнения множественной регрессии, и рассеянием фактических значений зависимой переменной. Величина его будет тем больше, а корреляционная связь тем более интенсивной, чем меньше фактические значения отклоняются от теоретической линии множественной регрессии. Коэффициент множественной корреляции достигнет значения, равного единице, если все наблюдаемые значения признака будут полностью совпадать с рассчитанными на основе уравнения множественной регрессии. Это значит, что вариация зависимой переменной полностью объясняется изменениями независимых переменных, включенных в расчет корреляции.

В экономических исследованиях приходится часто определять степень влияния отдельного фактора на зависимую переменную при условии, что остальные независимые факторы не меняются. Такие задачи решаются методами частной корреляции. Для определения уравнения частной регрессии по какому-либо

Моделирование транспортных процессов

фактору необходимо в найденное уравнение множественной регрессии подставить средние или другие фиксированные значения факторов, кроме анализируемого. Такие уравнения частной регрессии будут различаться между собой лишь свободным членом. Коэффициент регрессии при исследуемом факторе всегда остается тем же, что и в уравнении множественной регрессии и называется частным коэффициентом регрессии. Интенсивность влияния каждого фактора на зависимую переменную измеряется коэффициентом частной корреляции.

212

Коэффициент частной корреляции рассчитывают на основе коэффициентов парной корреляции. Например, коэффициент частной корреляции первого порядка при изучении влияния фактора x_j на зависимую переменную y , при исключении влияния фактора x_2 определяется из выражения

$$R_{y1,2} = \frac{r_{y1} - r_{y2}r_{12}}{\sqrt{(1 - r_{y2}^2)(1 - r_{12}^2)}},$$

где r_{y1} – коэффициент парной корреляции между зависимой переменной и фактором x_1 ; r_{y2} – коэффициент парной корреляции между y и x_2 ; r_{12} – коэффициент корреляционной зависимости между факторами x_1 и x_2 .

В общем случае, когда в корреляционную модель включено l независимых переменных x_1, x_2, \dots, x_l , воздействующих на изменение величины зависимой переменной y , коэффициент частной корреляции любого ранга определяют так:

$$R_{y1,2,3,\dots,n} = \frac{r_{y1,2,3,\dots,(n-1)} - r_{yn,2,3,\dots,(n-1)}r_{1n,2,3,\dots,(n-1)}}{\sqrt{[1 - r_{yn,2,3,\dots,(n-1)}^2][1 - r_{1n,2,3,\dots,(n-1)}^2]}}$$

Параметры уравнения множественной регрессии, а также коэффициенты частной корреляции целесообразно рассчитывать на ЭВМ по стандартным программам.

Контрольные вопросы:

1. Что позволяет исследовать однофакторный корреляционно-регрессионный анализ?
2. Что означает тесноту связи между признаками?
3. Чем характеризуется теснота связи при парной линейной корреляционной зависимости?
4. Дать понятие корреляционного поля.
5. Чем характеризуется общая колеблемость значений производительности труда, вызванная действующими на нее факторами?
6. Что показывает корреляционное отношение?
7. Понятие о множественной корреляции.
8. Диапазон изменения коэффициента множественной корреляции.
9. От чего зависит коэффициент множественной корреляции?
10. В каком случае коэффициент множественной корреляции достигнет значения, равного единице?

Лекция 14. Методы оптимизации автотранспортных мощностей и их размещения

Вопросы лекции:

3. Постановка и экономико-математическая модель задачи развития и размещения транспортных мощностей
4. Метод последовательного перерасчета издержек

Вопрос 1. Постановка и экономико-математическая модель задачи развития и размещения транспортных мощностей

Размещение транспортных мощностей в широком его понимании заключается в территориальном распределении производительных сил в соответствии с общественным разделением труда. Его цель - создать оптимальную пространственную структуру производства, обеспечивающую рациональное использование материальных ресурсов, сбережение общественного труда, комплексное развитие территории и производственно-экономических связей, улучшение территориальных пропорций.

Оптимизационные модели развития и размещения производительных сил относятся к задачам перспективного планирования. На

213

автомобильном транспорте оптимальным считается такой план создания новых и расширения или модернизации действующих транспортных мощностей, выбора способа и вида перевозок, при котором спрос на транспортные услуги удовлетворялся бы полностью с наибольшей эффективностью.

Решение задачи развития и размещения грузового автотранспорта позволяет получить ответы на такие вопросы, как:

размещение, размеры и специализация транспортных мощностей; темпы развития отрасли и отдельных ее подразделений; соотношение между реконструкцией действующих предприятий и новым строительством;

потребность отрасли в капитальных вложениях и других важнейших ресурсах, а также их распределение между объектами;

прикрепление транспортных мощностей к поставщикам грузов, а поставщиков к потребителям;

транспортные связи с указанием направления и объема перевозок, а также провести сравнительную оценку эффективности учтенных ресурсов, транспортных мощностей применительно к рассматриваемому критерию и в рамках используемой экстремальной модели.

Модели оптимального развития и размещения производства и транспорта включают обширный круг задач (рис. 8.1). В общем случае эти задачи должны ставиться как динамические. Динамическая постановка задач позволяет оптимизировать развитие и размещение отрасли с учетом процессов ее развития во времени. Техничко-экономические показатели и ограничения такой задачи должны быть заданы для всех моментов времени рассматриваемого периода и отражать связи между последовательными состояниями одного и того же объекта.

Информационные, а иногда и вычислительные трудности, связанные с динамической постановкой задач размещения, в некоторых случаях приводят к

Моделирование транспортных процессов

необходимости упрощенной постановки практических задач как статических. При этом система размещения рассматривается на какой-то фиксированный момент времени (год) и считается постоянной во времени. Задачу размещения удобнее решать как задачу линейного программирования, однако это слишком упрощает модель и не отражает некоторых основных положений теории размещения.

В линейных моделях по существу не учитывается фактор, вызывающий концентрацию автотранспортного производства, - это нелинейная зависимость затрат на единицу производства от его масштабов и специализации. В реальной действительности зависимость затрат от масштабов производства описывается гиперболической или степенной функцией. Задача размещения в этом случае должна иметь нелинейную целевую функцию, расчет которой связан с большими трудностями из-за необходимости анализа работы действующих предприятий и обработки значительного числа статистических данных методами корреляционно-регрессионного анализа.

214

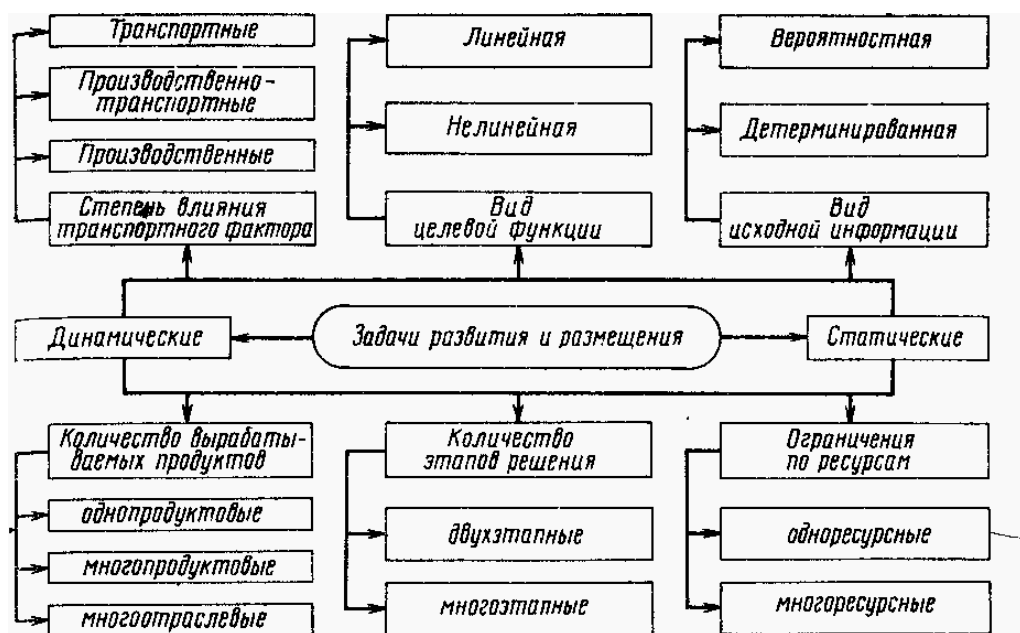


Рис. 8.1. Классификация задач развития и размещения производства и транспорта

Применение сложных методов оптимизации, таких, как динамическое или нелинейное программирование, тоже затруднено, поэтому прибегают к кусочно-линейной аппроксимации соответствующих нелинейных зависимостей и последовательному решению целого ряда линейных моделей. Такой прием используется, в частности, при решении задачи размещения методом последовательного перерасчета издержек, который будет изложен несколько позже.

Кратко охарактеризуем некоторые виды задач размещения. Так, однопродуктовые задачи размещения на автомобильном транспорте отражают развитие и размещение автотранспортных предприятий, выполняющих перевозки однородного или взаимозаменяемых грузов. Многопродуктовые задачи предназначены для выбора оптимальных мощностей, специализации и размещения транспортных предприятий, осуществляющих перевозки двух и более видов грузов.

Моделирование транспортных процессов

Задачи развития и размещения транспорта могут быть одноэтапными и многоэтапными. В одноэтапных задачах учитывается процесс доставки либо только сырья, необходимого для производства продукции, либо доставки только продукции к местам ее потребления. Если, например, оптимизировать транспортный процесс по доставке сырья и готовой продукции одновременно, то такая задача размещения относится к типу многоэтапных.

Имеются и другие признаки классификации задач размещения (см. рис. 8.1). Каждая конкретная задача обычно характеризуется несколькими признаками.

215

В проблеме размещения грузового автомобильного транспорта одним из важных является вопрос о показателе производственной транспортной мощности предприятий. От того, насколько правильно будет обоснован этот показатель, зависит результат решения задачи, ведь оптимизация размещения на транспорте по сути и сводится к выбору транспортной мощности предприятий и рациональному их распределению по территории в соответствии с общественным разделением труда, уровнем развития производительных сил в регионе и другими условиями и особенностями района размещения.

В общем понимании мощность – это размер работы, выполняемой в единицу времени. Поэтому показатель грузовой автотранспортной мощности должен учитывать все виды работ, выполняемых предприятием. Продукция транспортной работы выражается количеством выполненных тонно-километров и перевезенных тонн груза. Совместно учесть оба эти вида работ можно с помощью их сопоставления, а также через переводные коэффициенты и определение показателя транспортной работы в приведенных тонно-километрах. Таким же методом можно учитывать и остальные виды транспортных работ (перевозку пассажиров, работу транспорта по часам, транспортно-экспедиционные услуги и др.).

Другим важным вопросом при разработке экономико-математической модели задачи размещения является оценка вариантов размещения по их эффективности. Показатель, определяющий эффективность размещения и позволяющий выбрать оптимальный план развития и размещения транспорта с точки зрения этого показателя, называется критерием оптимальности. От того, насколько обоснованно выбран этот показатель, зависит эффективность решения всей задачи размещения.

Основное требование, предъявляемое к критерию оптимальности в частных практических задачах размещения, заключается в том, что он должен соответствовать народнохозяйственному оптимуму. Но, как известно, глобальный критерий окончательно еще не установлен, поэтому в качестве частных критериев используют различные показатели, которые обеспечивают разработку не оптимального, а лишь допустимого плана размещения.

Вопрос 2. Метод последовательного перерасчета издержек

Исходными данными для решения экономико-математической модели задачи размещения грузовых автотранспортных мощностей служат:

перечень пунктов грузообразования и их потребность в перевозках, схема географического расположения в районе размещения и схема транспортной сети района;

Моделирование транспортных процессов

возможные варианты развития действующих транспортных мощностей с анализом их технико-эксплуатационных показателей по различным перспективным вариантам эксплуатации и реконструкции. Это данные о размерах транспортных мощностей, соответствующих эксплуатационных затратах и капитальных вложениях, затратах на нулевые пробеги автомобилей для различных вариантов возможного развития мощностей;

возможные пункты размещения новых транспортных мощностей с возможными их предельными размерами в каждом пункте и соответствующие технико-эксплуатационные и экономические показатели.

Для того чтобы планировать размещение транспорта, необходимо знать перспективный спрос на перевозки. Для этого существуют определенные методы расчета показателя как в территориальном разрезе, так и по этапам планирования. Это могут быть методы экстраполяционного прогнозирования, данные плановых и статистических органов о перспективах развития исследуемого района размещения и др. Однако следует отметить, что показатель перспективного спроса на перевозки остается все же весьма условным и поэтому требует периодического пересмотра и корректировки.

Одной из сложных задач при подготовке исходной информации для решения вопросов размещения транспортных мощностей являются технико-экономические изыскания по установлению возможных пунктов размещения мощностей. Теоретически пунктов возможного размещения бесконечно много, однако число мест размещения, в которых имеются необходимые предпосылки, всегда ограничено. Это, как правило, центры административных районов и другие населенные пункты, в которых имеются источники необходимых ресурсов (трудовых, энергетических и т. д.) и коммуникации по их доставке.

Особое внимание следует обратить на экологические и социальные факторы и условия при размещении транспортных производств. Для этого следует проводить необходимые изыскания и экспертизы,,

В качестве исходных нужно также иметь данные о составляющих целевой функции (критерии оптимальности), т. е. данные об эксплуа

219

тационных и капитальных затратах, а также затратах на прирост порожних пробегов автомобилей. Эти показатели должны быть рассчитаны на единицу транспортной работы, т. е. 1 приведенный т·км. Себестоимость перевозок для различных вариантов развития транспортных мощностей определяют на основе отчетных и статистических данных при помощи методов корреляционно-регрессионного анализа и прогнозирования технического прогресса в области грузового автотранспорта. Капитальные вложения определяют по сметной стоимости строительства и стоимости подвижного состава.

Изложим более подробно методику расчета затрат на прирост порожних пробегов.

Затраты на прирост порожних пробегов автомобилей зависят от территориального расположения грузоотправителей, грузополучателей и мест размещения автотранспортных мощностей. Прирост происходит из-за изменения величины нулевых пробегов. При обслуживании перевозками j -го пункта-грузоотправителя автотранспортным подразделением, расположенным в пункте i , затраты на нулевой пробег за все время работы составят

$$\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m l_{0ij} AD_{p_{ij}} c_{км},$$

где l_{0ij} – нулевой пробег автомобиля при подаче его от i -го автотранспортного подразделения к j -му грузоотправителю и обратно, км; $AD_{p_{ij}}$ – автомобиле-дни работы j -го грузоотправителя при его обслуживании i -м автотранспортным подразделением; $c_{км}$ – стоимость 1 км пробега автомобиля, р.

Если в пункте-грузоотправителе выполнено $p^{т\#км}$ транспортной работы, то затраты на прирост порожних пробегов автомобилей в расчете на 1 приведенный т-км составят

$$d_{ij} = \frac{l_{0ij} AD_{p_{ij}} c_{км}}{p_{прив\ т\cdot км}}. \quad (8.1)$$

Чтобы определить затраты на 1 км нулевого пробега, необходимо полученное выражение разделить на величину нулевых пробегов.

Удельные затраты на прирост порожних пробегов автомобиле! рассчитывают по каждому сочетанию пункта размещения и пункт* отправления груза в зависимости от расстояния между ними. Эй затраты учитывают в критерии эффективности размещения.

В соответствии с экономико-математической моделью задачу размещения составляется исходная матрица для решения (табл. 8.1). Е первом столбце матрицы указаны пункты возможного размещений автотранспортных подразделений, в последнем столбце - их расчет ная мощность, полученная при решении задачи. В предпоследней/ столбце проставлены значения принятой мощности, соответствующий максимально возможной мощности подразделения в данном пункте

220

Таблица 8.1

Пункт возмож- ного раз- мещения АТП	Грузоотправитель					Транспортная мощность, млн. приведенных т·км в год	
	B_1	B_2	...	B_n	B_ϕ	приня- тая	расчет- ная
A_1 сущ	$c_{11} + d_{11}$ x_{11}	$c_{12} + d_{12}$ x_{12}	...	$c_{1n} + d_{1n}$ x_{1n}	M x_{1n+1}	q_1	$w_1 =$ $\sum_{j=1}^n x_{1j}$
A_2	$c_{21} + K_2 + d_{21}$ x_{21}	$c_{22} + K_2 + d_{22}$ x_{22}	...	$c_{2n} + K_2 + d_{2n}$ x_{2n}	0 $x_{2,n+1}$	q_2	$w_2 =$ $\sum_{j=1}^n x_{2j}$
...
A_m	$c_m + K_m + d_{m1}$ x_{m1}	$c_m + K_m + d_{m2}$ x_{m2}	...	$c_m + K_m + d_{mn}$ x_{mn}	0 $x_{m,n+1}$	q_m	$w_m =$ $\sum_{j=1}^n x_{mj}$
Спрос на перевоз- ки, приве- денные т·км в год	b_1	b_2	...	b_n	$\sum_{i=1}^m q_i -$ $\sum_{j=1}^n b_j$	$\sum_{i=1}^m q_i >$ $\sum_{j=1}^n b_j$	$\sum_{i=1}^m w_i =$ $\sum_{j=1}^n b_j$

Пункты-грузоотправители указаны по горизонтали матрицы, а их спрос на перевозки - в последней строке. В матрице один столбец отводится для фиктивного потребителя, спрос которого на транспортную работу принимается равным разности между принятой мощностью автотранспортных подразделений и общей потребностью грузоотправителей в транспортной работе.

В правом верхнем углу клеток матрицы проставляют показатели суммарных затрат на единицу транспортной работы r^{\wedge} . Напомним, что суммарные затраты включают эксплуатационные затраты c_{ϕ} , капитальные вложения K_{IF} а также затраты на прирост порожних пробегов автомобилей g^{\wedge} . В клетках матрицы, соответствующих действующим АТП, которые не требуют капитальных вложений на реконструкцию и развитие, в суммарных затратах учитываются только затраты на эксплуатацию и прирост порожних пробегов, т. е. $c_{\phi} + d_{\phi}$. В клетках столбца "фиктивный потребитель", соответствующих действующим

221

транспортным мощностям, проставляют букву М, которая означает бесконечно большое число. В остальных клетках проставляют нули.¹ Это необходимо для того, чтобы предупредить планирование фиктивной транспортной работы действующим предприятиям и поставить в равные условия остальные подразделения.

Поскольку размещаемые мощности и расстояния отличаются друг от друга, в исходной матрице будут разными и показатели критерия оптимальности.

Моделирование транспортных процессов

Появляется возможность выбрать такие мощности и места их размещения, при которых общая сумма затрат на транспортную работу будет минимальной.

Задачу размещения целесообразно решать методом последовательного перерасчета издержек, который позволяет учесть нелинейность изменения удельных приведенных затрат от транспортной мощности и свести общее решение к решению ряда более простых транспортных задач.

Метод последовательного перерасчета издержек рассмотрим на условном числовом примере. Пусть известен район, в котором необходимо разместить транспортные мощности с таким расчетом, чтобы полностью удовлетворить спрос на перевозки с наибольшей их эффективностью. С этой целью в районе размещения проведены технико-экономические изыскания, в результате которых выявлено пять возможных пунктов размещения транспортных мощностей - A_1, A_2, A_3, A_4 и A_5 и максимально возможная величина транспортной мощности в каждом из пунктов. Эти значения мощностей занесены в предпоследний столбец матрицы задачи (табл. 8.2) "принятая мощность". На основе изучения и обработки отчетно-статистических данных, а также прогноза развития перевозок установлены плановые объемы транспортной работы в пунктах-грузоотправителях. Их значения помещены в последнюю строку матрицы.

Для каждой клетки матрицы рассчитаны соответствующие показатели критерия оптимальности. Для этого методом корреляционного анализа по исследуемой совокупности автотранспортных предприятий установлена зависимость эксплуатационных затрат на единицу транспортной работы от размера транспортной мощности, которая описывается гиперболой вида

$$c_i = 2,93 + 6,5/x,$$

где x — транспортная мощность, млн. приведенных т·км в год.

Таким же методом установлена зависимость капитальных вложений на 1 приведенный т·км транспортной работы от мощности:

$$K_i = 3,04 + 16,3/x.$$

Эти два элемента критерия оптимальности зависят только от транспортной мощности и сохраняют свое значение для всех клеток строки, соответствующей данной мощности.

Таблица 8.2

Пункт возмож- ного размеще- ния АТП	По- тенциа- лы строк	Грузоотправитель							Транспортная мощ- ность, млн. приведен- ных т·км в год	
		B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	B_{Φ}	приня- тая	расчет- ная
		Потенциал столбца								
		10	8	9	11	11	10	0		
A_1	0	11	14	9	12	16	10	0	5	3
A_2	0	9	8	10	14	12	11	0	10	4
A_3	-2	8	12	7	9	11	8	0	15	15
A_4 сущ	-2	8	10	11	14	9	12	М	8	8
A_5	-1	16	12	14	10	18	15	0	2	2
Спрос на перевозки, млн. приведенных т·км		5	4	10	9	3	1	8	40	32

Затраты на прирост порожних пробегов автомобилей сфу зависят как от объема выполняемой транспортной работы, так и от расстояния между пунктами размещения и грузоотправления, поэтому их необходимо рассчитать для каждой клетки матрицы по формуле (8.1).

Исходная матрица задачи размещения имеет форму табл. 8.2, разница состоит лишь в том, что в ней не заполнен последний столбец и не разнесены загрузки в клетки матрицы. Эти действия выполняют в ходе решения задачи. Решают исходную матрицу как открытую транспортную задачу любым из известных методов, например методом потенциалов. Расчетная мощность в каждом из пунктов размещения соответствует сумме транспортных работ (по строке), которую должно выполнить соответствующее АТП в пунктах-грузоотправителях (без

223

фиктивного) согласно полученному плану перевозок. Значение расчетной мощности заносят в последний столбец матрицы и сравнивают с принятым значением мощности. Если окажется, что значения совпадают или расчетная мощность равна нулю, то такой план считают оптимальным и решение задачи закончено. Если же такого соответствия нет, решение задачи следует продолжить. Для этого составляют новую матрицу, в которой пересчитывают показатели критерия оптимальности согласно расчетной мощности (отсюда название метода).

Моделирование транспортных процессов

Затем решают пересчитанную матрицу и подсчитывают суммарные затраты на перевозки. Составление и решение новых матриц продолжают до тех пор, пока не встретится сумма затрат, ранее уже полученная. Такое размещение соответствует оптимальному. Размеры мощностей считаются рациональными, а места их расположения наиболее эффективными.

Первый план размещения транспортных мощностей, полученный в результате решения исходной матрицы методом потенциалов, представлен в табл. 8.2. Согласно этому плану общие издержки на осуществление транспортной работы составят 2666 тыс. р.:

$$z = 9 \cdot 3 + 8 \cdot 4 + 7 \cdot 7 + 9 \cdot 7 + 8 \cdot 1 + 8 \cdot 5 + 9 \cdot 3 + 10 \cdot 2 = 2666 \text{ тыс. р.}$$

Сравнивая расчетную мощность с принятой, видим, что по пунктам и A_2 они не совпадают. Это значит, что решение задачи размещения не закончено, и его следует продолжить. Для этого составляется новая матрица, в клетках первой и второй строки которой показатели критерия оптимальности пересчитаны соответственно на мощность, равную 3 и 4 млн. приведенных т-км в год. Поскольку от величины мощности зависят удельные эксплуатационные затраты и капитальные вложения, их пересчитывают по тем же корреляционным зависимостям, что и на первом этапе решения. Составляющая критерия оптимальности по затратам на прирост порожних пробегов автомобилей du не пересчитывается, так как не зависит от размера транспортной мощности.

Пересчитанную матрицу решают так же, как транспортную задачу, полученное решение представлено в табл. 8.3.

Анализируя табл. 8.3, видим, что расчетные мощности остались прежними, следовательно, пересчитывать затраты нет смысла, так как они будут теми же. Изменилась общая сумма затрат за счет увеличения пересчитанных значений критерия в сравнении с исходными значениями, что объясняется снижением расчетной мощности по отношению к принятой. Общие издержки по второму плану размещения транспортных мощностей составят:

$$z = 2 \cdot 13 + 1 \cdot 13 + 4 \cdot 11 + 8 \cdot 7 + 7 \cdot 9 + 5 \cdot 8 + 3 \cdot 9 + 2 \cdot 10 = 2890 \text{ тыс. р.}$$

Поскольку получены те же расчетные мощности, что и в первом плане размещения, продолжать дальнейшее решение задачи нецелесо-

Таблица 8.3

Пункт возможного размеще- ния АТП	Потен- циал строки	Грузоотправитель							Транспортная мощность, млн. приведенных т·км в год	
		B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	B_{ϕ}		
		Потенциал столбца							приня- тая	расчет- ная
		10	11	13	15	11	13	0		
A_1	0	14	17	13	15	19	13	0	5	3
A_2	0	12	11	14	17	15	14	0	10	4
A_3	-6	8	12	7	9	11	8	0	15	15
$A_{4 \text{ сущ}}$	-2	8	10	11	14	9	12	М		
A_5	-5	5		0	3					
		16	12	14	10	18	15	0	2	2
Спрос на перевозки, млн. приведенных т·км		5	4	10	9	3	1	8	40	32

сообразно, так как оно будет повторяться. Данное распределение транспортных мощностей принимается за оптимальное.

Полученный план размещения транспортных мощностей является реальным, поскольку в нем потребности пунктов-грузоотправителей в транспортной работе удовлетворены полностью. При этом не нарушается баланс между расчетной суммарной мощностью и общей потребностью в транспортной работе. Рациональным является размещение в пункте A_1 мощности в 3 млн. приведенных т·км в год; в пункте A_2 - 4 млн. приведенных т·км; в пункте A_3 - 15 млн. приведенных т·км; в пункте сущ следует оставить ту же действующую транспортную

Таблица 8.4

Пункт размещения автотранспортной мощности	Обслуживаемый грузоотправитель	Объем транспортной работы, млн. приведенных т·км
A_1	$\begin{cases} B_3 \\ B_6 \end{cases}$	2 1
A_2	B_2	4
A_3	$\begin{cases} B_3 \\ B_4 \end{cases}$	8 7
$A_{4\text{сущ}}$	$\begin{cases} B_1 \\ B_5 \end{cases}$	5 3
A_5	B_4	2
Итого		32

мощность, т. е. 8 млн. приведенных т·км, и в пункте A_5 рационально разместить мощность, равную 2 млн. приведенных т·км в год.

Получен также план рационального прикрепления грузоотправителей к местам размещения транспортных мощностей, расшифровка которого приведена в табл. 8.4.

Контрольные вопросы

1. В чем состоит существо размещения транспортных мощностей?
2. Цель размещения транспортных мощностей.
3. К каким задачам относятся оптимизационные модели развития и размещения производительных сил перспективного планирования?
4. На какие вопросы дают решения задач развития и размещения грузового автотранспорта?
5. В чем выражается продукция транспортной работы?
6. Исходные данные для решения экономико-математической модели задачи размещения грузовых автотранспортных мощностей.
7. Что необходимо знать планирования размещение транспорта?

Лекция 15. Сетевые методы планирования и управления

Вопросы лекции:

5. Назначение системы СПУ. Элементы сетевых моделей
6. Принципы построения сетевых графиков
7. Расчет параметров сетевой модели
8. Оптимизация сетевых моделей

Вопрос 1. Назначение системы СПУ. Элементы сетевых моделей

Сетевое планирование и управление (СПУ) - прогрессивная форма научного анализа и контроля в управлении различными отраслями народного хозяйства - получило широкое распространение в экономических исследованиях.

СПУ представляет собой систему планирования и управления, которая является комплексом современных расчетных методов планирования, организационных мероприятий и средств контроля за выполнением плана. Она позволяет повысить по сравнению с традиционными методами эффективность управления за счет рациональной организации производственных процессов, а также выявления и мобилизации скрытых ресурсов времени и материальных средств.

Данная система используется на автомобильном транспорте при планировании сложных и трудоемких работ с большим числом исполнителей, например, при планировании и анализе работы автотранспортных и авторемонтных предприятий, в области перспективного и оперативного планирования автомобильных перевозок, для анализа транспортных сетей. Использование систем СПУ целесообразно также при составлении монтажно-транспортных графиков, устанавливающих взаимосвязь строительства и автомобильного транспорта в соответствии с принятым комплексным планом выполнения работ.

Работы по сетевому планированию ведутся в два этапа:

расчет и построение сетевого плана;

его анализ для выявления резервов времени и материальных ресурсов (выполняется последовательно с целью улучшений плана и доведения его до оптимального).

Задачи, решаемые в системе СПУ, можно условно разделить на два класса:

задачи минимизации времени выполнения комплекса работ при ограниченных или неограниченных ресурсах;

задачи определения минимальной стоимости или минимума ресурсов для осуществления данного комплекса работ.

Сетевое планирование как метод математического моделирования основан на использовании сетевых моделей, которые могут быть моделями различных процессов: производственных, научно-исследовательских, транспортных и т. д.

Сетевая модель представляет собой математический аппарат для изучения и управления сложными комплексами взаимосвязанных работ, направленных на достижение относительно небольшого числа четко определенных целей. Сетевая модель может быть изображена либо графически, либо в виде таблиц.

Моделирование транспортных процессов

Графическое изображение модели - сетевой график - дает возможность, сохранив существующую на практике взаимосвязь составных частей исследуемого процесса, отобразить его во времени с необходимой степенью детализации. Однако в системе СПУ сетевой график служит лишь инструментом управления и сетевые методы планирования не ограничиваются его использованием.

В состав системы СПУ входят: технология применения специальной сетевой модели для описания управляемого процесса; способы использования сетевых графиков как наглядное отображение данной модели; методы расчета сетевой модели и комплекс специальных процедур, позволяющих рационально организовывать, планировать, оценивать и контролировать выполнение комплекса работ или данного производственного процесса. Так, например, в строительстве сетевая модель, построенная по критерию "время", представляет собой технологию производства строительно-монтажных работ.

Следовательно, процесс построения сетевой модели комплекса операций можно представить в виде следующих этапов:

- изучение исходных данных и расчленение комплекса операций на отдельные работы;

- построение исходного сетевого графика;

- определение показателей работы исходного сетевого графика и их оценка;

- расчет сетевой модели;

- приведение параметров сетевой модели в соответствие с заданными ограничениями (оптимизация моделируемого процесса);

- расчет показателей плана;

- утверждение полученных показателей вышестоящими организациями и доведение их до ответственных исполнителей работ.

Для изучения основ сетевого планирования следует рассмотреть подробно этапы построения сетевого графика, расчеты сетевой модели и ее оптимизацию.

Задача построения сетевого графика может быть сведена к следующему: необходимо реализовать некоторый производственный (или транспортный) процесс (комплекс работ), связанный с выполнением конечного числа операций и достижением в результате этого определенной поставленной цели, например определения минимально возможной продолжительности реализации данного процесса (комплекса), т. е. нахождения наиболее раннего из всех возможных сроков его завершения.

Сетевые графики могут быть ориентированы не только на критерий времени, но и на другие параметры, например, минимизацию ресурсов или конечной стоимости работ по выполнению заданного плана.

Существуют одноцелевые и многоцелевые сетевые графики. Многоцелевые графики основаны тех же методах построения и расчета, что и одноцелевые, с той лишь разницей, что наиболее ранние сроки завершения событий должны вычисляться для каждой из

256

поставленных целей. Наиболее поздний из этих сроков определяет время решения задачи, т. е. время достижения конечной цели.

Сетевой график позволяет графическим способом (в виде сети) установить технологические взаимосвязи всех звеньев основного комплекса и определить возможную последовательность выполнения работ, которая приведет к получению оптимального конечного результата организации процесса.

Моделирование транспортных процессов

Для построения и расчетов сетевого графика необходимо: руководителям комплекса работ установить желаемый срок завершения работ; составить в соответствии с принятой технологией перечень действий и операций, необходимый для достижения целей; принять желаемую или требуемую последовательность выполнения операций, т. е. точно определить, какие операции должны быть закончены, чтобы могла начаться любая другая операция, входящая в комплекс; при этом для задания такой последовательности необходимо определить лишь те операции, которые непосредственно предшествуют каждой рассматриваемой операции.

Сетевой график может быть выполнен с различной степенью детализации процесса. Это зависит от характера системы СПУ и ее целевого назначения. Для разных уровней управления степень детализации или укрупнения сетевых графиков может быть различной.

На практике при исследовании крупных производственных процессов или выполнении больших комплексов работ составляются локальные сетевые графики на участки или операции; затем происходит "сшивка" этих локальных графиков и составление общего сетевого графика для процесса в целом.

В сетевом планировании выделяются два основных элемента сетевых графиков: это событие и работа.

В любом комплексе работ или производственном процессе могут быть выделены важнейшие моменты, определяющие этапы выполнения комплекса или процесса. Например, моменты начала или окончания каких-либо технологических операций (процедур), организационно-технических мероприятий, составления документации, поставок материалов; моменты начала или окончания элементов перевозочного процесса, погрузки-разгрузки и т. д.

Такие моменты в сетевом планировании называются событиями. Следовательно, событие представляет собой начало или окончание какого-либо действия (операции).

Само действие (операция), которое необходимо выполнить для достижения поставленных целей, называется работой. В сетевом планировании работа понимается не как определенный результат, а как процесс, предшествующий свершению какого-либо события.

Таким образом, сетевой график представляет собой последовательность работ и событий, отражающую их технологическую взаимосвязь.

На любом одноцелевом сетевом графике выделяются два особых события: начальное и конечное.

257

Начальное событие соответствует началу работ (нулевой момент времени), а конечное - их завершению (достижению поставленной цели). Остальные события называются промежуточными.

Характерной особенностью событий является то, что они происходят как бы "автоматически", если выполнены все предшествующие им работы, т. е. для совершения события не требуется затрат никаких ресурсов (временных, материальных и пр.).

В отличие от события работа, как процесс, не может произойти без затрат каких-либо ресурсов: времени, материалов, энергии, рабочей силы и т. д.

При построении и расчетах сетевых графиков по критерию "время" каждая работа, входящая в состав графика, должна характеризоваться своей продолжительностью. Продолжительность работ измеряется в единицах времени, устанавливаемых для данного графика (часы, дни, месяцы и т. п.).

Моделирование транспортных процессов

Оценка продолжительности работ, входящих в сетевой график, должна выполняться либо ответственными исполнителями работ, либо экспертами, имеющими большой практический опыт. Она проводится на основе сведений о наличии ресурсов и ритмичности их использования. Способ оценки параметров работ имеет важное значение в системах СПУ. Кроме временных оценок работы, в сетевом графике могут иметь место оценки по необходимому количеству исполнителей, трудоемкости, стоимости и другим параметрам.

Таким образом, построение сетевого графика может начинаться с выделения событий или с составления полного перечня работ, которые необходимо выполнить, и определения их продолжительности.

Непрерывная последовательность взаимосвязанных работ и событий от начального до конечного события, которая имеет наибольшую продолжительность • во времени, называется критическим путем. Критический путь является одним из важнейших понятий в сетевом планировании. Он имеет большую практическую ценность, так как позволяет проводить оптимизацию сетевых графиков. Продолжительность критического пути характеризует и продолжительность всего комплекса работ, поскольку увеличение продолжительности (или сдвиг срока окончания) любой операции, принадлежащей этому пути, приводит к такому же увеличению продолжительности комплекса или процесса.

Критический путь на сетевом графике не обязательно является единственным. Те работы и события, через которые проходит критический путь, называются критическими. Как показывает практика, количество критических событий и работ не превышает обычно 10- 15 % элементов сетевого графика. Однако именно эти работы, составляющие критический путь, определяют сроки выполнения комплекса работ в целом. Сокращение или увеличение сроков выполнения критических работ соответственно сокращает или увеличивает общую продолжительность производственного (транспортного, научно-исследовательского и др.) процесса.

258

Другие работы, находящиеся на менее продолжительных по времени путях, не влияют на своевременное достижение цели и имеют некоторый резерв времени по сравнению с критическими работами. Это позволяет перераспределить ресурсы, с тем чтобы сократить критический путь и тем самым уменьшить общую* продолжительность комплекса работ, т. е. определить наиболее ранний из возможных срок завершения какого-либо процесса.

Определение продолжительности критического пути, а также других показателей - ранних и поздних сроков начала и окончания работ, ресурсов (запасов) времени, вероятностей наступления событий и т. д. - проводится при расчете сетевой модели.

Вопрос 2. Принципы построения сетевых графиков

Рассмотрим методы построения сетевых графиков, основные параметры сетевых моделей и их расчет на примере одноцелевого сетевого графика (рис. 9.1), который упрощенно представляет собой процесс составления сменно-суточного плана перевозок грузов автомобильным транспортом.

Составление плана перевозок грузов расчленено на пятнадцать событий, каждому из которых, кроме начального, предшествует одно или несколько действий (работ). Задана также продолжительность каждой работы.

Моделирование транспортных процессов

Перечень работ, характеризующий сетевой график, а также продолжительность работ, представлен в табл. 9.1 (продолжительности выполнения работ выбраны условно).

Основные правила построения сетевых графиков сводятся к следующему.

На сетевом графике событие принято обозначать кружком, внутри которого указан номер события. Выделены начальное, конечное и промежуточное события. Каждое промежуточное имеет последующее и предшествующее события, которые соединены ориентированной стрелкой, причем стрелка всегда должна быть направлена от предшествующего события к последующему. Эта стрелка и представляет собой на сетевом графике работу. Любые два события могут быть соединены не более чем одной стрелкой.

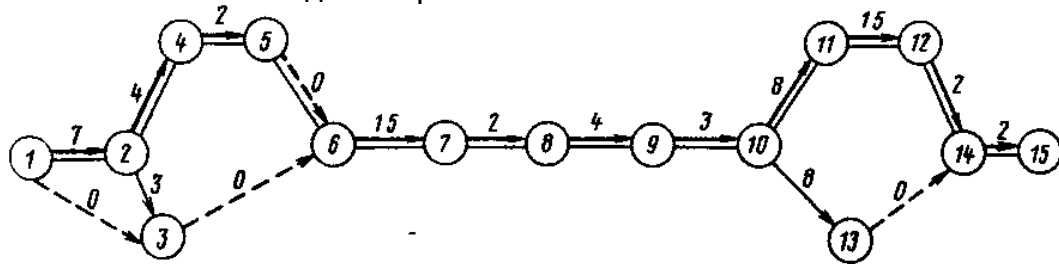


Рис. 9.1. Сетевой график составления сменно-суточного задания

259

Таблица 9.1

Работа	Содержание работы	Продолжительность работы, ч
1-2	Получение заявок на перевозку грузов от клиентуры	7
1-3	Фиктивная работа (зависимость)	0
2-3	Определение корреспондирующих точек и расстояний между ними	3
2-4	Определение объемов перевозок	4
3-6	Фиктивная работа (зависимость)	0
4-5	Выбор подвижного состава для осуществления перевозок	2
5-6	Фиктивная работа (зависимость)	0
6-7	Разработка рациональных маршрутов перевозок	1,5
7-8	Расчет потребного парка подвижного состава	2
8-9	Составление маршрутных ведомостей	4
9-10	Выписка путевых листов	3
10-11	Доставка грузов потребителям	8
10-13	Контроль за работой подвижного состава на линии	8
11-12	Прием товарно-транспортных документов	1,5
12-14	Обработка товарно-транспортных документов	2
13-14	Фиктивная работа (зависимость)	0
14-15	Составление диспетчерского отчета	2

Как уже говорилось, событие является промежуточным или окончательным результатом одной или нескольких работ, которые необходимо выполнить, чтобы

Моделирование транспортных процессов

можно было начать одну или несколько следующих работ. Событие выполняется после окончания всех входящих в него работ, причем момент свершения события является одновременно и моментом окончания последней из них.

Начальное событие не имеет никаких предшествующих работ и на графике характеризуется тем, что в него не входит ни одна стрелка (см. рис. 9.1, событие 1).

Конечное событие не имеет никаких последующих работ, так как оно само является конечным результатом. На графике из него не выходит ни одна стрелка (событие 15).

События сетевого графика нумеруются так, чтобы для каждой работы номер начального события был меньше, чем номер конечного.

Каждая работа кодируется двумя цифрами. Первая цифра означает начало работы и соответствует номеру предшествующего события; вторая означает окончание работы и соответствует номеру последующего события. Например, работа "Выписка путевых листов", выполняемая между событиями 9 и 10, имеет код (9-10) (см. табл. 9.1).

На сетевых графиках продолжительность работы указана над стрелкой, соединяющей два события. Следует иметь в виду, что длина и направление стрелок не связаны с действительной продолжитель-

ностью работ. На рис. 9.1 видно, что часть работ графика выполняется последовательно, например работы 6-7, 7-8, 8-9 и т. д. Это означает, что начало каждой последующей работы зависит от окончания предшествующей. Другие работы, например 10-11, 10-13, могут начинаться в один и тот же момент времени с наступлением события 10, поскольку этим двум работам предшествует одна и та же работа 9-10. Такие работы не зависят во времени одна от другой и могут выполняться параллельно. Комплекс работ завершится, как только окончится работа 14-15 и совершится событие 15. Составление сменно-суточного плана перевозок грузов на этом считается законченным.

Работы, на выполнение которых необходимо затратить только время и никакие другие ресурсы, называются ожиданиями. Они так же как и остальные, отмечаются на сетевом графике сплошной стрелкой. Ожидания в ходе выполнения работ могут быть связаны с технологическими перерывами.

Однако между какими-либо двумя событиями может быть только логическая взаимосвязь, и в этом случае работа может быть как бы "выполнена" без затрат каких-либо ресурсов, в том числе и времени. Тогда считается, что между этими событиями установлена зависимость, которая на графике обозначается пунктирной линией между событиями 1 и 3; 3 и 6; 5 и 6; 13 и 14, а такие работы, как 1-3, 3-6, 5-6, 13-14, называются фиктивными. Продолжительность фиктивных работ равна нулю. Значение фиктивных работ будет рассмотрено далее при расчетах параметров сетевого графика.

Таким образом, при построении сетевых графиков в кружках указывают номера событий; стрелки представляют собой работы; цифры над стрелками называются временными оценками, они показывают ориентировочную продолжительность работ. Кроме того, на графике должен быть выделен критический путь, как максимальный по продолжительности путь между начальным и конечным событиями. Минимизации критического пути при анализе сетевых графиков уделяется главное внимание.

Необходимо также при разработке и составлении сетевых графиков учитывать следующие важные их особенности:

Моделирование транспортных процессов

1. Ни одно событие не может произойти до тех пор, пока не будут закончены все входящие в него работы.

2. Ни одна работа, выходящая из данного события, не может начаться до тех пор, пока данное событие не произойдет.

3. Ни одна последующая работа не может быть начата раньше, чем будут закончены все предшествующие ей работы.

Исходя из рассмотренных выше положений, можно установить, что в системах СПУ при построении исходного сетевого графика используется следующая терминология: элементы сетевого графика - события и работы.

Событие - важнейший момент в технологическом процессе или в комплексе выполняемых работ, представляющий собой начало или окончание какого-либо действия, работы.

261'

Начальное событие - событие, не имеющее предшествующих работ; соответствует нулевому моменту времени.

Конечное событие - событие, не имеющее последующих работ; соответствует моменту достижения поставленной цели.

Предшествующее событие - событие, которым данная работа начинается.

Последующее событие - событие, которым та же самая работа заканчивается.

Критическое событие - событие, через которое на графике проходит критический путь.

Работа - производственный (или какой-либо другой) процесс, предшествующий совершению какого-нибудь события и требующий для своего выполнения затрат временных, материальных или трудовых ресурсов.

Зависимость - "фиктивная работа", для выполнения которой затрат каких-либо ресурсов не требуется; отражает логическую взаимосвязь между двумя событиями.

Критическая работа - работа, лежащая на критическом пути.

Путь - непрерывная последовательность работ и событий.

Длина пути - сумма продолжительности находящихся на данном пути работ.

Для того чтобы рассчитать необходимое время на выполнение комплекса работ или, как в рассматриваемом примере, на составление сменно-суточного плана перевозок грузов, и определить значения критического пути и других параметров сетевой модели, надо в первую очередь определить время начала и окончания каждой работы, время наступления каждого события, входящего в сетевой график, а также установить возможности изменения этих параметров, иначе говоря, возможность проведения оптимизации сетевой модели.

262

Вопрос 1. Расчет параметров сетевой модели

Расчет сетевой модели сводится к определению следующих данных: ожидаемых сроков выполнения комплекса работ в соответствии с сетевым графиком; состава работ критической зоны (критического и подкритического путей), т. е. определению тех работ, у которых резервы времени минимальны; сроков их начала и окончания; ранних и поздних сроков начала и окончания остальных работ сетевого графика с определением имеющихся резервов времени.

Моделирование транспортных процессов

Для определения ожидаемых сроков выполнения комплекса работ ("ожидаемого времени") в сетевом планировании используются три временных оценки:

оптимистическая - время, необходимое для выполнения процесса при благоприятных условиях;

пессимистическая -/время, необходимое для выполнения процесса при крайне неблагоприятных условиях;

262

Таблица 9.2

№ п/п	Путь	Продолжительность пути	Примечания
1	1-2-4-5-6-7-8-9-10-11-12-14-15	$7+4+2+0+15+2+4+3+8+15+2+2=37$	Критический путь
2	1-2-4-5-6-7-8-9-10-13-14-15	$7+4+2+0+15+2+4+3+8+0+2=33,5$	
3	1-2-3-6-7-8-9-10-11-12-14-15	$7+3+0+15+2+4+3+8+15+2+2=34$	
4	1-2-3-6-7-8-9-10-13-14-15	$7+3+0+15+2+4+3+8+0+2=30,5$	
5	1-3-6-7-8-9-10-11-12-14-15	$0+0+15+2+4+3+8+15+2+2=24$	Путь наименьшей длины
6	1-3-6-7-8-9-10-13-14-15	$0+0+15+2+4+3+8+0+2=20,5$	

наиболее вероятная - время, необходимое для выполнения процесса в реально сложившихся в данный момент обстоятельствах.

Временные оценки складываются из статистически ожидаемых продолжительностей работ, входящих в состав данного комплекса.

Как уже говорилось, оценки продолжительности работ являются очень важными показателями в системе СПУ, поэтому необходимо, чтобы их давали либо ответственные исполнители, либо опытные эксперты.

Первой следует давать оценку наиболее вероятного времени, затем можно оценить оптимистическое время и последней дается оценка пессимистического времени. Эти три оценки продолжительности работ определяют различные сроки наступления событий и являются исходными параметрами при анализе и расчете сетевой модели.

Вычислить продолжительность критического пути можно исходя из того, что длина пути на сетевом графике представляет собой сумму продолжительности пути и находящихся на данном пути работ, а критический путь по определению является максимальным из возможных путей графика между начальным и конечным событиями. Для этого используются расчеты, представленные в табл. 9.2.

Из табл. 9.2 видно, что критическим является путь 1 продолжительностью 37 ч. Этот путь выделен на рис. 9.1 более яркой сплошной стрелкой. Остальные пути графика меньше критического по продолжительности, следовательно, они имеют резерв времени. Пути 2 и 3 имеют продолжительность, близкую по значению к

Моделирование транспортных процессов

критической, т. е. они находятся в критической зоне. Такие пути называются подкритическими. Резервы времени у них минимальны.

263

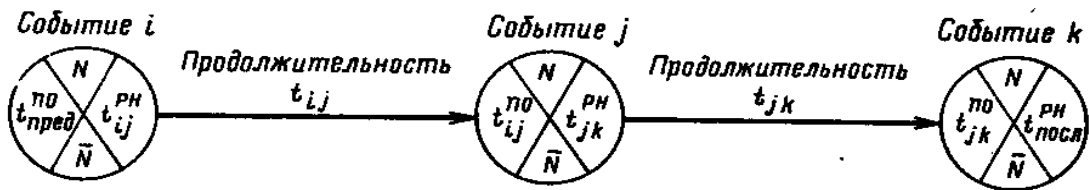


Рис. 9.2. Основные элементы сетевого графика

При расчете сетевых моделей ожидаемое расчетное время обозначают t^j (где / - номер предшествующего события для данной работы; j - номер последующего события для данной работы).

При расчете ожидаемого времени могут быть использованы как методы детерминированного расчета, так и методы теории вероятностей.

Величина t_{immj} представляет собой продолжительность работы и на сетевом графике проставляется над стрелкой (рис. 9.2).

Каждое событие в сетевой модели характеризуется тремя расчетными показателями, определяющими срок его наступления.

1. Наиболее ранний срок наступления каждого события в сети $T_p(j)$ где $j = 1, 2, \dots, n$ - одно из событий данной сети (на рис. 9.1 л ■ 1, 2, ..., 15).

Время $T_p(0)$ является минимально необходимым временем между, наступлением начального и данного событий. $T_p(1) = 0$, т. е. для начального события сетевого графика наиболее ранний срок наступления равен нулю, что следует из определения начального события.

Для любого другого события этот показатель определяется:

$$T_p(j) = \max [T_p(i) + t_{ij}],$$

где t_{ij} - продолжительность работы (i - j).

Следовательно, минимальное время, необходимое для того, чтобы могло наступить событие j (наиболее ранний срок наступления $T_p(j)$ определяется как время выполнения комплекса работ по пути наибольшей длины из всех путей, соединяющих начальное и данное события.

Для конечного события сетевого графика наиболее ранний срок наступления равен продолжительности критического пути. Наиболее ранний срок наступления конечного события называется критическим временем сетевого графика.

2. Наиболее поздний срок наступления события в сети $T_n(i)$.

Этот показатель определяет наиболее допустимое время наступления события, не требующее увеличения времени на выполнение всего комплекса работ.

Для критического события сетевого графика $T_p(i) = T_n(i)$; для начального $T_p(1) = 0$.

264

Для других событий сетевого графика $T_n(i)$ определяется;

$$T_n(i) = \min [T_n(j) - t_{ij}],$$

Моделирование транспортных процессов

где T_{nfi}) наиболее поздний срок наступления последующего события y . $f..$ - продолжительность работы ($| - y$)»

Этот показатель рассчитывается от конца сетевого графика к началу, т. е. в направлении, обратном определению наиболее раннего срока наступления событий. Для конечного события k делается предположение, что наиболее ранний срок его наступления равен наиболее позднему сроку, т. е. $T_p(k) = T_n(k)$.

Бели это равенство не выполняется, значит, продолжительность комплекса работ оказалась больше допустимой, установленной для данного графика. Тогда продолжительности работ комплекса, в первую очередь критических, должны корректироваться. Для критического пути также верно равенство $T_p(j) = T_n(j)$.

9. Допустимый срок наступления события $T_a(j)$:

$$T_p(i) \leq T_a(i) \leq T_n(i).$$

Данное неравенство показывает, что допустимый срок наступления события должен находиться в диапазоне изменений от наиболее раннего срока наступления до наиболее позднего допустимого срока наступления события. Для критических событий $\Delta(k) = \varepsilon(k)$.

Результаты расчетов сроков наступления событий для сетевого графика приведены в табл. 9.3.

Для событий, лежащих на критическом пути $T_p(k) = T_n(k)$.

Как известно, каждое событие на сети является одновременно моментом окончания предшествующей, входящей в него работы, и начала последующей работы, выходящей из данного события. Следовательно, каждое событие содержит две временные оценки (рис. 9.3):

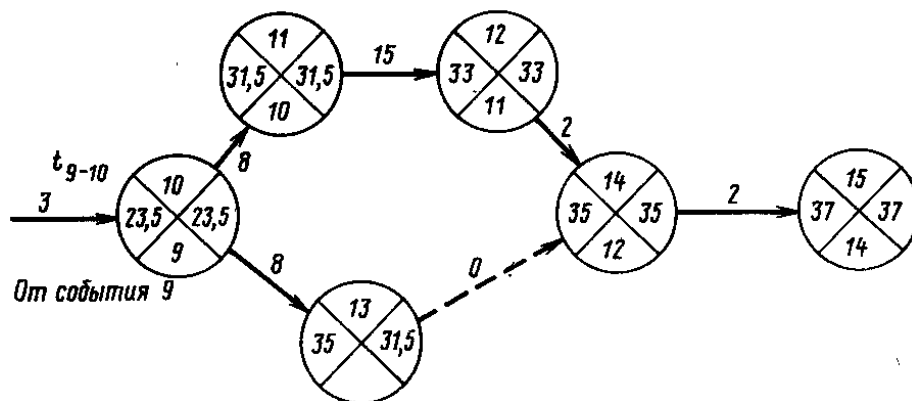


Рис. 9.3. Сетевой график составления сменно-суточного задания и его расчетные параметры

265

Таблица 9.3

№ события	Событие	Срок наступления события	
1	Начато поступление заявок на перевозку грузов от клиентуры	0	0
2	Начато определение объемов перевозок и корреспонденцирующихся точек с расстояниями между ними	7	7
3	Закончено определение расстояний между корреспонденцирующимися точками	10	13*
4	Закончено определение объемов перевозок и начат	11	11

Моделирование транспортных процессов

	выбор подвижного состава		
5	Выбор подвижного состава закончен	13	13
6	Начата разработка рациональных маршрутов	13	13
7	Начат расчет потребного парка подвижного состава	14,5	14,5
8	Начато составление маршрутных ведомостей	16,5	16,5
9	Начата выписка путевых листов	20,5	20,5
10	Начаты доставка грузов потребителям и контроль за работой подвижного состава на линии	23,5	23,5
и	Доставка грузов потребителям окончена	31,5	31,5
12	Окончен приекс товарно-транспортных накладных и начата их обработка	33	33
13	Закончен контроль за работой подвижного состава	31,5	35*
14	Начато составление диспетчерского отчета	35	35
15	Составление диспетчерского отчета закончено	37	37

* События, не лежащие на критическом пути.

раннее начало последующей работы; позднее окончание предшествующей работы.

В рамках сетевого графика каждая работа характеризуется следующими временными параметрами:

1. Раннее начало работы t_{jk}^{PH} определяется как продолжительность пути от начального события до предшествующего события данной работы. Раннее начало любой последующей работы ($j - k$) равно сумме значений раннего начала и продолжительности работы ($i - j$), предшествующей данной работе (см. рис. 9.3):

$$t_{jk}^{PH} = t_{ij}^{PH} + t_{ij} \quad (9.1)$$

Раннее начало работ, выходящих из первого события, равно нулю. Например, для работы 4-5

$$t_{4-5}^{PH} = t_{2-4}^{PH} + t_{2-4} = t_{1-2}^{PH} + t_{1-2} + t_{2-4} = 0 + 7 + 4 = 11.$$

266

Если данной работе предшествуют две и более работы, то ее раннее начало равно максимальному значению сумм раннего начала и продолжительности предшествующих ей работ:

$$t_{jk}^{PH} = \max [t_{ij}^{PH} + t_{ij}]. \quad (9.2)$$

Раннее начало работы ($j - k$) равно наиболее раннему сроку наступления предшествующего события т. е.

$$t_{jk}^{PH} = T_p(j);$$

например,

$$t_{4-5}^{PH} = T_p(4) = 11 \text{ ч.}$$

2. Раннее окончание работы t_{ij}^{PO} равно сумме раннего начала работы и ее продолжительности:

$$t_{ij}^{PO} = t_{ij}^{PH} + t_{ij}; \quad (9.3)$$

например, для работы 4-5

$$t_{4-5}^{po} = t_{4-5}^{pn} + t_{4-5} = 11 + 2 = 13 \text{ ч.}$$

Раннее окончание работы меньше или равно значению наиболее раннего срока наступления последующего события; работы $i - j$.

3. Позднее начало работы t^{pm} представляет собой самый поздний срок начала работы, который не вызывает задержки выполнения всего комплекса работ." Позднее начало работы рассчитывается в обратном порядке, от конца сетевого графика к началу, и определяется, как разность между продолжительностью критического пути и наибольшей длиной пути от конечного события графика до предшествующего события данной работы. Например, для работы 9-10

$$t_{9-10}^{pn} = t_{кр} - (t_{14-15} + t_{12-14} + t_{11-12} + t_{10-11} + t_{9-10}) = 37 - (2 + 2 + 1,5 + 8 + 3) = 20,5 \text{ ч.}$$

На графике (см. рис. 9.1) между событиями 13 и 14 введена зависимость, т. е. существует фиктивная работа 13-14. Это значит, что после окончания работы 10-13 и совершения события 13 может быть начата работа 14-15. Другими словами, сменно-суточное планирование перевозок после окончания контроля за работой подвижного состава на линии позволяет приступить к началу составления диспетчерского отчета. Аналогично объясняется значение работ 1-3, 5-6, 3-6.

Из графика видно, что для определения позднего начала работы существует второй путь от конечного события 15 до события 9 - путь 9-10-13-14-15. Его продолжительность равна $2 + 0 + 8 + 3 = 13$, что меньше длины первоначально рассмотренного пути 9-10-11-12-14-15. Согласно формуле (9.3) выбирается наибольшее из этих значений, следовательно, $N_{9-10}^{po} = 20,5 \text{ ч.}$

267

4. Позднее окончание работы t равно времени окончания работы, если она была начата в поздний срок, и поэтому определяется, как сумма позднего начала работы и ее продолжительности:

$$t_{ij}^{po} = t_{ij}^{pn} + t_{ij}; \quad (9.4)$$

например, для работы 9-10

$$t_{9-10}^{po} = t_{9-10}^{pn} + t_{9-10} = 20,5 + 3 = 23,5 \text{ ч.}$$

Если известно позднее окончание последующей работы, то для данной работы это значение определяется так:

Например, для работы (8-9)

$$t_{ij}^{po} = t_{ij}^{po} - t_{jk}. \quad (9.5)$$

Позднее окончание работы f "усетевого графика «всегда равно наиболее позднему сроку наступления последующего события T_{jj} , например $= 23,5 \text{ ч.}$

Если у данной работы две и более последующих работы, то ее позднее окончание определяется минимальной разностью между , поздним окончанием и продолжительностью последующих работ:

$$t_{ij}^{po} = \min [t_{jk}^{po} - t_{jk}]. \quad (9.6)$$

Изменение рассмотренных параметров дает возможность увеличивать или сокращать продолжительность выполнения каждой работы; сетевого графика. Очевидно, что для работ, находящихся на критическом пути, никаких вариантов изменения продолжительности быть не может, поскольку сроки наступления предшествующего и последующего событий одинаковы, т. е.

$$T_p(i) = T_n(i) \quad \text{и} \quad T_p(j) = T_n(j).$$

Для критических работ совпадают временные параметры, а, значит, запасы времени у этих работ равны нулю. /

В зависимости от возможных изменений временных характеристик: так для других работ сетевого графика, не лежащих на критическом пути, могут быть определены запасы времени:

1. Полный (общий) запас времени R_{ij} представляет собой время, на которое можно перенести начало работы / или, наоборот, увеличить» ее продолжительность без изменения общего срока выполнения комплекса работ:

$$R_{ij} = t_{ij}^{пн} - t_{ij}^{рн}; \quad (9.7)$$

например, для работы 13-14
268

2. Свободный (независимый) запас времени \bar{R} рассчитывается для одной или нескольких работ графика

$$R_{13-14} = t_{13-14}^{пн} - t_{13-14}^{рн} = 35 - 31,5 = 3,5. \quad (9.8)$$

например, для работы 1-3

$$\bar{R}_{1-3} = T_p(3) - T_n(1) - t_{1-3} = 10 - 0 - 0 = 10 \text{ ч.}$$

3. Частный запас (резерв) времени r представляет собой время, на которое можно перенести начало работы или увеличить ее продолжительность без изменения раннего начала последующих работ (одной или нескольких):

$$r_{ij} = t_{jk}^{рн} - (t_{ij}^{рн} + t_{ij});$$

например, для работы 3-6

$$r_{3-6} = t_{6-7}^{рн} - (t_{3-6}^{рн} + t_{3-6}) = 13 - (10 + 0) = 3 \text{ ч.}$$

Таким образом, для основных параметров - временных характеристик - при расчетах сетевых моделей используют следующие условные обозначения:

Моделирование транспортных процессов

Параметр	Условное обозначение
Ожидаемое расчетное время или продолжительность	t_{ij}
Наиболее ранний срок наступления события	$T_p(j)$
Наиболее поздний срок наступления события	$T_n(j)$
Допустимый срок наступления события	$T_a(j)$
Раннее начало работы $i = j$	t_{ij}^{pn}
Позднее начало работы $i = j$	$t_{ij}^{пн}$
Позднее окончание работы $i = j$	$t_{ij}^{по}$
Раннее окончание работы $i = j$	$t_{ij}^{ро}$
Полный (общий) запас времени	R_{ij}
Свободный запас времени	\bar{R}_{ij}
Частный запас времени	r_{ij}

Ручным способом могут быть обработаны массивы исходных данных для сетевого графика, содержащего 200-300 элементов. Критический путь и резервы времени рассчитывают или непосредственно на сетевом графике, или в виде таблиц.

В результате расчетов определяют продолжительности критического пути, резервы времени и сроки выполнения работ в соответствии с приведенными ранее формулами.

269

Расчет параметров модели на сетевом графике. Параметры модели при этом методе расчета определяются непосредственно на сетевом графике. Нумерация событий в возрастающем порядке на графике не обязательна, но для любых изменений, вносимых в сетевой график и требующих перерасчета параметров, необходимо составлять новый график.

По этому методу каждое событие графика делится на четыре сектора (см. рис. 9.3). Как уже рассматривалось, каждое событие сетевого графика содержит раннее окончание последующей, выходящей из него работы. Это значение записывается в правом секторе события. Событие также содержит оценку позднего окончания предшествующей, т. е. входящей в него работы. Это значение указывается в левом секторе. В верхнем секторе записывается номер данного события N , а в нижнем - номер предшествующего события N , через которое к данному идет максимальный путь от начального события.

Расчет начинается с определения по формулам (9.1) и (9.2) раннего начала работ сетевого графика. Начиная с события J , для которого раннее начало работ, выходящих из него, равно нулю, определяются значения Π^n для последующих работ и записываются в правые сектора событий. Для конечного, завершающего события сети раннее начало (полученное значение) переносится в левый сектор, имеющий значение позднего окончания работ. Затем по формулам (9.5) и (9.6) определяются значения поздних окончаний работ и проставляются в левые сектора событий. Значения раннего окончания и позднего начала, проставленные в конечном событии, представляют собой длину критического пути данного графика. Критический путь можно установить, переходя от конечного события 15 по тем номерам событий, которые записаны в нижних секторах.

Моделирование транспортных процессов

Если событие лежит на критическом пути, в нем раннее начало последующих работ равно позднему окончанию предшествующих работ = Работы, соединяющие критические события, лежат на критическом пути. Затем по формулам (9.7), (9.8), (9.9) определяют резервы времени, которые имеет данный график. Полученные результаты расчетов сводят в табл. 9.4.

Пример, расчета параметров графика вручную рассмотренным методом дан для участка сети, изображенной на рис. 9.1 от события 10, до события 15, и приводится на рис. 9.3.

Расчет сетевых моделей в табличной форме. При этом методе расчета должны соблюдаться все правила построения сетевых графиков, в том числе и нумерация событий. В результате расчетов формируется таблица (см. табл. 9.4), по которой затем выполняется анализ, и определяется возможность корректировки временных характеристик модели с целью ее оптимизации.

В графе 1 таблицы указывают число работ, предшествующих данной работе; в графе 2 - коды работ, входящих в состав сетевого графика, в возрастающем порядке; в графе 3 - продолжительность работ; в графах 4-10 - значения временных характеристик, рассчи-

Таблица 9.4

Число работ, предшествующих данной	Код работы $i = j$	Продолжительность работы, ч	Начало работы		Окончание работы		Запас времени		
			ран-нее	позд-нее	ран-нее	позд-нее	пол-ный	сво-бод-ный	част-ный
			$t_{ij}^{рн}$	$t_{ij}^{пн}$	$t_{ij}^{ро}$	$t_{ij}^{по}$	R_{ij}	\bar{R}_{ij}	r_{ij}
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	1-2	7	0	0	7	7	0	0	0
0	1-3	0	0	13	0	13	13	10	10
1	2-3	3	7	10	10	13	3	0	0
1	2-4	4	7	7	11	11	0	0	0
2	3-6	0	10	13	10	13	3	0	3
1	4-5	2	11	11	13	13	0	0	0
1	5-6	0	13	13	13	13	0	0	0
2	6-7	1,5	13	13	14,5	14,5	0	0	0
1	7-8	2	14,5	14,5	16,5	16,5	0	0	0
1	8-9	4	16,5	16,5	20,5	20,5	0	0	0
1	9-10	3	20,5	20,5	23,5	23,5	0	0	0
1	10-11	8	23,5	23,5	31,5	31,5	0	0	0
1	10-13	8	23,5	27	31,5	35	3,5	0	0
1	11-12	1,5	31,5	31,5	33	33	0	0	0
1	12-14	2	33	33	35	35	0	0	0
1	13-14	0	31,5	35	31,5	35	3,5	0	3,5
2	14-15	2	35	35	37	37	0	0	0

танных для данного графика по формулам, приведенным ранее. Из полученных значений определяется величина критического пути, а также критические события и работы данного графика.

Расчеты, приведенные в табл. 9.4, выполнены для сетевого графика "Составление сменно-суточного плана перевозок грузов автомобильным транспортом", представленного на рис. 9.1. Из табл. 9.4 следует, что значение

Моделирование транспортных процессов

критического пути определяется по максимальной величине из ранних окончаний работ Δ и равно 37 ч. Позднее окончание работы 14-15, завершающееся событием 15, равно максимальному значению из ранних окончаний работ и также определяется продолжительностью критического пути.

Работы, у которых их раннее начало и окончание соответственно равны позднему началу и окончанию, лежат на критическом пути и не имеют запасов времени. Для данного графика к ним относятся работы 1-2, 2-4, 4-5, 5-6, 6-7, 7-8, 8-9, 9-10, 10-11, 11-12, 12-14, 14-15.

271

Вопрос 2. Оптимизация сетевых моделей

После того как построен исходный сетевой график и рассчитаны основные параметры сетевой модели, необходимо дать оценку полученным результатам, т. е. сравнить значение продолжительности критического пути с тем желательным сроком завершения работ, который был установлен руководством разрабатываемого комплекса*. Если установленный срок оказался меньше расчетного срока выполнения комплекса работ (процесса), т. е. меньше полученной продолжительности критического пути, то необходимо перейти к следующему этапу сетевого планирования - анализу сетевого графика на основе полученных расчетов и его оптимизации по времени.

Оптимизация сетевого графика по времени заключается в сокращении критического пути по времени и проводится в следующем порядке:

проверяется правильность временных оценок работ критической зоны сетевого графика, т. е. таких работ, которые или уже находятся: на критическом пути, или имеют минимальные резервы времени; необходимо стремиться к тому, чтобы продолжительность работ критической зоны была минимальной в допустимых пределах;

изучается возможность замены последовательного выполнения работ параллельными там, где это допускается технологией, с целью сокращения общей продолжительности работ;

проводится перераспределение ресурсов между работами сетевого графика, т. е. резервы времени, которыми располагают работы вне критической зоны, передаются работам критическим или близким к ним;

анализируется возможность максимального сокращения критических работ;

сокращаются сроки выполнения комплекса работ за счет привлечения дополнительных ресурсов, а также изменения технологических условий производства комплекса работ.

> После выполнения этих мероприятий вновь необходимо провести расчет сетевой модели с целью определения длины критического пути и соответствующих значений временных параметров.

Построение и расчеты различных вариантов одного и того же сетевого графика необходимы еще и потому, что работы, критические для одного варианта процесса, могут быть не критическими для другого варианта, и, наоборот, не критические работы могут стать критическими в зависимости от способа составления графика. При получении нового варианта сетевого графика определяется новое значение критического пути, которое должно уже в большей степени соответствовать установленному сроку выполнения работ. Затем ищутся новые возможности сокращения сроков, и так до тех пор, пока все варианты улучшения сетевого графика не будут опробованы.

Моделирование транспортных процессов

В реальных условиях сетевые модели могут содержать тысячи операций (работ), поэтому выполнить анализ сетевых графиков И;

272

расчеты различных вариантов их построения традиционными методами невозможно. Для решения подобных задач эффективно используются экономико-математические методы, позволяющие проводить расчеты как вручную, так и с использованием ЭВМ.

При построении соответствующих математических моделей переменными являются сроки начала и окончания операций (работ). Необходимо оптимизировать целевую экстремальную функцию по заданному критерию. Оптимизация сетевого графика, как уже отмечалось, проводится на основе изменения критического пути.

Сетевой график (см. рис. 9.1) представляет собой сеть, аналогичную транспортной сети, в которой заданы события (вершины), работы (звенья), определены некоторые неотрицательные величины (f_{ij}), характеризующие продолжительность выполнения работы. Решением задачи является нахождение оптимального значения критического пути, т. е. определение на сети расстояния между двумя вершинами (начальным и конечным событиями), или пути, проходя по которому

п

I_{Σ} - суммарная продолжительность работ сетевого графика - достигает максимума.

Нетрудно видеть, что данная задача в такой постановке структурно эквивалентна задаче определения кратчайших расстояний между пунктами транспортной сети, методы которой изложены в гл. 5, п. 5.1.

Заменяя расстояние между двумя вершинами на продолжительность выполнения работ в сетевом графике, можно получить задачу, аналогичную рассмотренной ранее, с той лишь разницей, что в данном случае целевая функция - определение продолжительности критического пути - максимизируется, а не минимизируется.

Те же экономико-математические методы, которые используются для определения кратчайших расстояний, могут быть использованы и для оптимизации сетевых моделей. Эту аналогию можно проследить на простом примере.

Чтобы определить наиболее ранний срок наступления какого-либо события на сети $r(j)$ (где $j > 2$), необходимо просчитать суммарные затраты времени по всем путям, ведущим к данному событию, и выбрать из них максимальный. Затем, установив срок наступления для какого-либо определенного события, можно строить дальнейшие пути и находить их продолжительности, используя данное событие в качестве начального. Наиболее поздние сроки наступления событий рассчитывают аналогично, но в обратном порядке, поэтому из нескольких возможных значений времени выбирают минимальное.

В наиболее сложных постановках задач сетевого планирования в качестве переменных величин рассматривают продолжительность операций (работ), на которые наложены определенные ограничения. В таких задачах минимизируются либо продолжительность комплекса работ в целом при заданных затратах на его реализацию, либо затраты при фиксированной продолжительности работ.

273

В сетевом планировании используются три экономико-математических метода исследования операций.

Моделирование транспортных процессов

1. Сетевые модели, построенные на основе сетевых графиков, представляют собой объект математической теории графов - направленные графы. Сетевые графики позволили найти новые области применения этого математического метода исследований. С точки зрения теории графов, сетевые графики рассматриваются как детерминированные, т. е. имеющие фиксированное значение продолжительности каждой работы. Однако на практике продолжительность работ сетевого графика получает различные оценки: наиболее вероятную, оптимистическую и пессимистическую. /

2. Определение и анализ временных оценок продолжительности работ позволяют представить сетевой график в виде вероятностно-математической модели и использовать для расчетов параметров сетевого графика теорию вероятностей и математической статистики. /

В случае вероятностного анализа параметров (временных характеристик значений критического пути) получается очень большое количество реализаций данного сетевого графика. Расчеты в таком случае проводятся с использованием современных ЭВМ.

3. При оптимизации сетевых моделей используются принципы теории оптимальных задач линейного и нелинейного программирования.

Сетевые модели при проведении оптимизации обычно сводятся путем преобразований к частным случаям моделей линейного программирования и решаются с применением экономико-математических методов и ЭВМ методами линейного программирования. Уже было рассмотрено, как можно представить сетевую модель в виде подобной задачи. Оптимизация сетевых планов методами линейного программирования может проводиться по критериям "время", "стоимость" или "ресурсы". Алгоритм решения задачи представляет собой алгоритм определения наибольшего значения продолжительности критического пути. •

Однако в общей постановке задачи нахождения оптимальных планов на основе сетевых моделей не могут быть решены методами линейного программирования, поскольку их решение связано с определением экстремальных значений целевой функции многих переменных, на которые наложена совокупность ограничений, при условии, что сама функция и некоторые ограничения нелинейны. В таком случае в сетевом планировании для решения данных задач используются методы нелинейного целочисленного программирования, в частности динамическое программирование (общий метод)*. Расчеты таких моделей достаточно сложны и трудоемки, поэтому на практике применяются упрощенные постановки подобных задач, а в результате решения достигается частичная, а не полная оптимизация.,

Преимущества и недостатки сетевого метода планирования. Важным преимуществом сетевого планирования по сравнению с другими методами является то, что составление и использование

274

сетевых моделей позволяют осуществлять на практике принцип выборочного управления, т. е. сосредоточить внимание только на тех моментах работы, которые являются решающими с точки зрения сроков. Такими моментами, очевидно, будут критические и подкритические работы, находящиеся в критической зоне, т. е. имеющие нулевые или минимальные резервы времени.

Принцип выборочного управления в таком случае осуществляется, как правило, посредством перевода ресурсов с некритических работ на критические с целью оптимизации критического пути и сокращения сроков выполнения комплекса работ. Это делается либо на этапе планирования, либо уже при

Моделирование транспортных процессов

контроле за выполнением процесса при отставании выполнения работ от намеченного графика.

Кроме использования принципа выборочного управления, сетевые модели имеют и другие преимущества:

анализ сетевых моделей позволяет составить план мероприятий по выполнению какого-либо комплекса или процесса, причем в план включаются работы, имеющие решающее значение для данного процесса. В то же время из сети исключаются работы, степень важности которых незначительна; сетевые графики дают четкое представление об общем объеме работ комплекса; облегчают распределение средств и рабочей силы, что создает условия для наилучшего использования ресурсов; позволяют не только составлять оперативные и текущие планы, но и прогнозировать сложные процессы и большие комплексы работ, что способствует выявлению резервов и повышению эффективности производства; обеспечивают наглядность технологической последовательности работ; изменения практических условий работы не вызывает изменений самой графической модели; меняются только значения продолжительности работ, составляющих сетевой график. Это преимущество сетевых графиков особенно ощутимо по сравнению с использованием в практике планирования календарных линейных графиков.

Рассмотренные методы построения систем СПУ на основе сетевых графиков (моделей сетевого планирования) в настоящее время получают все большее распространение в различных отраслях народного хозяйства, в том числе и на автомобильном транспорте.

Использование систем СПУ с применением средств современной вычислительной техники повышает эффективность процессов планирования, организации и управления и является прогрессивным направлением в развитии народного хозяйства нашей страны.

Недостатком СПУ является то, что после снятия каждой информации до какого-либо события следует делать перерасчет графика, начиная с данного события. Вследствие этого увеличивается и усложняется объем вычислительной работы.

Контрольные вопросы:

1. Что представляет собой сетевое планирование и управление?
2. Для решения каких задач на автомобильном транспорте используется СПУ?
3. Этапы работ при сетевом планировании.
4. Классы задач, решаемых в системе СПУ?
5. На чем основано сетевое планирование?
6. Что представляет собой сетевой график?
7. Типы сетевых графиков.
8. Характеристика одноцелевых графиков.
9. Характеристика многоцелевых графиков.
10. Понятие критического пути на сетевом графике.
11. Дать определение понятиям «Начальное событие» и «Конечное событие».
12. Дать определение понятиям «Предшествующее событие» и «Последующее событие».
13. Дать определение понятиям «Критическое событие» и «Работа».
14. К чему сводится расчет сетевой модели?
15. Методика расчета параметров модели на сетевом графике.
16. Методика расчета сетевых моделей в табличной форме.

Лекция 16. Общая характеристика и математический аппарат систем массового обслуживания

Вопросы лекции:

1. Задачи теории массового обслуживания. Классификация систем массового обслуживания
2. Общая характеристика и математический аппарат систем массового обслуживания
3. Входящий поток требований. Время обслуживания

Вопрос 1. Задачи теории массового обслуживания. Классификация систем массового обслуживания

При исследовании операций часто приходится сталкиваться с работой своеобразных систем, называемых системами массового обслуживания (СМО). Примерами таких систем могут служить: телефонные станции, ремонтные мастерские, билетные кассы, справочные бюро, магазины, парикмахерские и т. п.

Каждая СМО состоит из какого-то числа обслуживающих единиц (или «приборов»), которые мы будем называть каналами обслуживания. Каналами могут быть: линии связи, рабочие точки, кассиры, продавцы, лифты, автомашины и др. СМО могут быть одноканальными и многоканальными.

Всякая СМО предназначена для обслуживания какого-то потока заявок (или «требований»), поступающих в какие-то случайные моменты времени. Обслуживание заявки продолжается какое-то, вообще говоря, случайное время $T_{об}$, после чего канал освобождается и готов к приему следующей заявки. Случайный характер потока заявок и времен обслуживания приводит к тому, что в какие-то периоды времени на входе СМО скапливается излишне большое число заявок (они либо становятся в очередь, либо покидают СМО необслуженными); в другие же периоды СМО будет работать с недогрузкой или вообще простаивать.

Процесс работы СМО представляет собой случайный процесс с дискретными состояниями и непрерывным временем; состояние СМО меняется скачком в моменты появления каких-то событий (или прихода новой заявки, или окончания обслуживания, или момента, когда заявка, которой надоело ждать, покидает очередь).

Предмет теории массового обслуживания — построение математических моделей, связывающих заданные условия работы СМО (число каналов, их производительность, правила работы, характер потока заявок) с интересующими нас характеристиками — показателями эффективности СМО, описывающими, с той или другой точки зрения, ее способность справляться с по

132

током заявок. В качестве таких показателей (в зависимости от обстановки и целей исследования) могут применяться разные величины, например: среднее число заявок, обслуживаемых СМО в единицу времени; среднее число занятых каналов; среднее число заявок в очереди и среднее время ожидания обслуживания; вероятность того, что число заявок в очереди превысит какое-то значение, и т. д. Среди заданных условий работы СМО мы намеренно не выделяем элементов решения: ими могут быть, например, число каналов, их производительность,

Моделирование транспортных процессов

режим работы СМО и т. д. Важно уметь решать прямые задачи исследования операций, а обратные ставятся и решаются в зависимости от того, какие именно параметры нам нужно выбирать или изменять. Что касается задач оптимизации, то мы ими здесь почти не будем заниматься, разве только в простейших случаях.

Математический анализ работы СМО очень облегчается, если процесс этой работы — марковский. Мы уже знаем, что для этого достаточно, чтобы все потоки событий, переводящие систему из состояния в состояние (потоки заявок, потоки «обслуживаний»), были простейшими. Если это свойство нарушается, то математическое описание процесса становится гораздо сложнее и довести его до явных, аналитических формул удастся лишь в редких случаях. Однако все же аппарат простейшей, марковской теории массового обслуживания может пригодиться для приближенного описания работы СМО даже в тех случаях, когда потоки событий — не простейшие. Во многих случаях для принятия разумного решения по организации работы СМО вовсе и не требуется точного знания всех ее характеристик — зачастую достаточно и приближенного, ориентировочного.

Системы массового обслуживания делятся на типы (или классы) по ряду признаков. Первое деление: СМО с отказами и СМО с очередью. В СМО с отказами заявка, поступившая в момент, когда все каналы заняты, получает отказ, покидает СМО и в дальнейшем процессе обслуживания не участвует. Примеры СМО с отказами встречаются в телефонии: заявка на разговор, пришедшая в момент, когда все каналы связи заняты, получает отказ и покидает СМО необслуженной. В СМО с очередью заявка, пришедшая в мо

433

мент, когда все каналы заняты, не уходит, а становится в очередь и ожидает возможности быть обслуженной. На практике чаще встречаются (и имеют большее значение) СМО с очередью; недаром теория массового обслуживания имеет второе название: «теория очередей».

СМО с очередью подразделяются на разные виды, в зависимости от того, как организована очередь — ограничена она или не ограничена. Ограничения могут касаться как длины очереди, так и времени ожидания (так называемые «СМО с нетерпеливыми заявками»). При анализе СМО должна учитываться также и «дисциплина обслуживания» — заявки могут обслуживаться либо в порядке поступления (раньше пришла, раньше обслуживается), либо в случайном порядке. Нередко встречается так называемое обслуживание с приоритетом — некоторые заявки обслуживаются вне очереди. Приоритет может быть как абсолютным — когда заявка с более высоким приоритетом «вытесняет» из-под обслуживания заявку с низшим (например, пришедший в парикмахерскую клиент высокого ранга прогоняет с кресла обыкновенного клиента), так и относительным — когда начатое обслуживание доводится до конца, а заявка с более высоким приоритетом имеет лишь право на лучшее место в очереди.

Существуют СМО с так называемым многофазовым обслуживанием, состоящим из нескольких последовательных этапов или «фаз» (например, покупатель, пришедший в магазин, должен сначала выбрать товар, затем оплатить его в кассе, затем получить на контроле).

Кроме этих признаков, СМО делятся на два класса: «открытые» и «замкнутые». В открытой СМО характеристики потока заявок не зависят от того, в каком состоянии сама СМО (сколько каналов занято). В замкнутой СМО — зависят. Например, если один рабочий обслуживает группу станков, время от времени требующих наладки, то интенсивность потока «требований» со стороны станков зависит от того, сколько их уже неисправно и ждет наладки: Это — пример

Моделирование транспортных процессов

замкнутой СМО. Классификация СМО далеко не ограничивается приведенными их разновидностями, но мы ограничимся ими.

134

Оптимизация работы СМО может производиться под разными углами зрения: с точки зрения организаторов (или владельцев) СМО или с точки зрения обслуживаемых клиентов. С первой точки зрения желательно «выжать все, что возможно» из СМО и добиться того, чтобы ее каналы были предельно загружены. С точки зрения клиентов желательно всемерное уменьшение очередей, которые зачастую становятся настоящим «бичом быта», приводя к бессмысленной трате сил и времени и, в конечном итоге, к понижению производительности труда. При решении задач оптимизации в теории массового обслуживания существенно необходим «системный подход», полное и комплексное рассмотрение всех последствий каждого решения. Например, с точки зрения клиентов СМО желательно увеличение числа каналов обслуживания; но ведь работу каждого канала надо оплачивать, что удорожает обслуживание. Построение математической модели позволяет решить оптимизационную задачу о разумном числе каналов с учетом всех «за» и «против». Поэтому мы не выделяем в задачах массового обслуживания какого-либо одного показателя эффективности, а сразу ставим эти задачи как многокритериальные.

Все перечисленные выше разновидности СМО (и многие другие, здесь не упомянутые) исследуются в теории массового обслуживания, литература по которой в настоящее время достигла огромных размеров. Мы назовем только несколько книг: [13—17]. Кроме того, разделы, посвященные теории массового обслуживания, имеются в ряде книг по исследованию операций: [1, 6, 7]. Однако почти нигде изложение не ведется на должном методическом уровне: выводы часто проводятся излишне сложно; верные (почти всегда) формулы доказываются не лучшим путем¹). В настоящем (по необходимости кратком) изложении теории массового обслуживания мы приведем два методических приема, позволяющих сильно упростить выводы формул. Этим приемам будет посвящен следующий параграф.

Вопрос 2. Общая характеристика и математический аппарат систем массового обслуживания

В связи с непрерывным развитием производства значительно усложняются производственные связи и взаимозависимости, возрастает объем экономических расчетов, повышаются требования к их точности. Все это требует применения математических методов, ускоряющих расчеты, повышающих их точность и облегчающих труд работников, занятых решением экономических задач.

Все более широкое распространение в настоящее время получают идеи и методы теории массового обслуживания, которые находят применение и на автомобильном транспорте, при исследовании технологических процессов, в расчетах по организации и планированию, при выявлении производственных резервов. Используя теорию массового обслуживания, можно решить, например, задачи определения числа линий или постов технического обслуживания и ремонта автомобилей, расчета количества постов погрузки (или разгрузки), определения рационального числа оборотных агрегатов и т. д.

В отличие от математического программирования, где главную роль играет определение минимума или максимума целевой функции при наличии ряда ограничений, основной задачей теории массового обслуживания является

Моделирование транспортных процессов

формализация процесса. Теория выражается в виде формул, объясняет и подсказывает ситуацию массового обслуживания, обеспечивая лучшее понимание и принятие соответствующих решений. Разумеется, на основании характеристик, полученных с помощью теории, можно определить оптимум целевой функции, но это делается уже приемами, непосредственно не относящимися к теории массового обслуживания.

Термин "обслуживание" означает удовлетворение каких-либо потребностей, а "массовое" показывает, что речь идет не о конкретном объекте, а о совокупности объектов, имеющих общие потребности в обслуживании. Особенностью теории массового обслуживания является то, что она рассматривает любой процесс массового обслуживания как вероятностный.

В этой главе почти не рассматривается математическая сторона теории массового обслуживания, поскольку перед нами стоит цель помочь студентам и инженерно-техническим работникам применить развитые в теории модели и методы для практических расчетов по организации и планированию работы автомобильного транспорта.

Теория массового обслуживания, являясь одним из разделов теории вероятностей, в последние годы получила развитие и выделилась в самостоятельный раздел математики. Основоположником ее

276

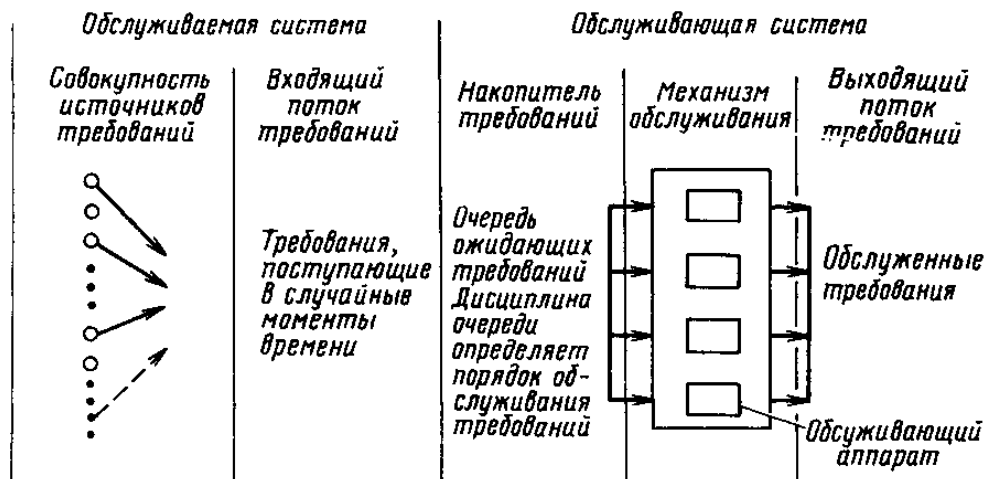


Рис. 10.1. Общая модель системы массового обслуживания

является датский ученый А. К. Эрланг, опубликовавший в 1909 г. первую книгу, посвященную вопросам применения теории при проектировании и эксплуатации телефонных станций. Большой вклад в развитие теории массового обслуживания внесли ученые А. Я. Хин-чин, Б. В. Гнеденко, Н. П. Бусленко, А. Н. Колмогоров, Б. А. Севастьянов, К. Пальм, Ф. Поллачек, Д. Кендалл, Д. Кокс, Т. Саати и др.

Стимулом к развитию теории массового обслуживания послужили попытки предсказать случайно изменяющиеся потребности по результатам наблюдений. Теория массового обслуживания занимается изучением таких процессов, в которых возникают очереди на обслуживание. Причиной возникновения очередей являются случайно изменяющиеся потребности в обслуживании и (или) колебания времени, затрачиваемого на удовлетворение заявки на обслуживание. Общая модель системы массового обслуживания представлена на рис. 10.1.

Моделирование транспортных процессов

Модель состоит из обслуживаемой и обслуживающей систем. Обслуживаемая система включает совокупность источников требований и входящего потока требований.

Требование - это* запрос на выполнение какой-либо работы (на производство услуги).

Источник требования - объект (человек, механизм и т. д.), который может послать в обслуживающую систему одновременно только одно требование.

Возможный носитель требования, например, автомобиль или агрегат, который может выйти из строя, рабочий, которому могут понадобиться запасные части, житель города или группа жителей - это источники требований, а заявки на ремонт, запасную часть, свободное такси - носитель требований, соответствующий указанным выше источникам. Требование и его носитель часто отождествляются.

277

Требования, поступающие от всех источников в обслуживающую систему, образуют поток, называемый входящим потоком требований.

Обслуживающая система состоит из накопителя и механизма обслуживания. Требования поступают в накопитель, где ожидают начала обслуживания, если есть очередь, или сразу в механизм обслуживания.

Обслуживанием считается удовлетворение поступившего запроса на выполнение услуги. Механизм обслуживания состоит из нескольких обслуживающих аппаратов.

Обслуживающий аппарат - это часть механизма обслуживания, которая способна удовлетворить одновременно только одно требование (ремонтный рабочий, бригада, кран, экскаватор, пост мойки и др.). Если обслуживание состоит из нескольких последовательных операций, каждая из которых выполняется отдельно обслуживающим аппаратом, то такое объединение аппаратов называют каналом обслуживания, а саму систему - многофазовой. После окончания обслуживания требования покидают систему, образуя выходящий поток требований.

В качестве примера системы массового обслуживания рассмотрим организацию погрузки на крупном предприятии - грузоотправителе. В такой системе входящий поток требований образуют автомобили, прибывающие на предприятие в какие-то случайные моменты времени. Обслуживанием является погрузка грузов в автомобили и выполнение некоторых сопутствующих ей операций, например проверка автомобилей при въезде на территорию предприятия, взвешивание, оформление документов и т. д. Обслуживание в этом случае является многофазовым. Требуется проанализировать работу данной системы^

Проводя соответствующие наблюдения, можно установить закон распределения входящего потока требований, закон распределения времени обслуживания на каждой фазе, время ожидания автомобиля в очереди, время простоя обслуживающих аппаратов и другие характеристики. Затем можно оценить, во сколько обходятся потери от ожидания в очереди автомобилей плюс потери от простоя аппаратов и обслуживающего персонала. Если полученная сумма окажется достаточно большой, то следует изменить организацию погрузочных работ, например увеличить число постов погрузки или взвешивания, заменить подвижной состав, изменить порядок погрузки, увеличить сменность работы и т. д.

Моделирование транспортных процессов

Как в таком случае выбрать наиболее эффективный вариант погрузки? Исходить из средней загруженности системы нельзя, поскольку одним из условий нормальной работы системы является выполнение неравенства (на каждой фазе)

$$\lambda / \mu = \rho < 1,$$

где λ - средняя интенсивность входящего потока требований в единицу времени; μ - интенсивность обслуживания одним аппаратом требований в единицу времени; s - число обслуживающих аппаратов; ρ — коэффициент использования обслуживающей системы.

278

Если коэффициент использования будет больше единицы, то обслуживающая система не справится с обслуживанием и очередь будет неограниченно расти.

В любой разомкнутой системе с ожиданием коэффициент использования должен быть меньше единицы. Следовательно, механизм обслуживания часть времени будет незанят. Однако это не исключает образования очереди в некоторые моменты времени. Наличие очереди объясняется случайностью моментов поступления требований в систему и колебаниями длительности их обслуживания. Поскольку моменты поступления требований случайны, работа системы протекает нерегулярно: в потоке требований образуются сгущения и разрежения. Сгущения могут привести к образованию очереди (либо к отказу обслуживания), разрежения - к непроизводительным простоям отдельных аппаратов или механизма обслуживания в целом. На эти случайности, связанные с нерегулярностью входящего потока, накладываются еще случайности, связанные с изменением времени обслуживания различных требований. Следовательно, при оценке качества функционирования обслуживающей системы всегда нужно учитывать вероятностный характер потока требований и времени обслуживания различных требований.

Теория массового обслуживания позволяет определить характер функционирования системы массового обслуживания по характеристикам ее частей (совокупность требований "входящий поток", "накопитель", "механизм обслуживания", "выходящий поток").

Для оценки работы обслуживающей системы можно применить также "Метод проб и ошибок". Например, оборудуется еще один пост погрузки, а затем в течение некоторого времени проводится наблюдение за работой модифицированной системы и определяются новые характеристики ее функционирования. Однако этот метод плох тем, что сначала приходится затрачивать время и средства, а затем уже определять, насколько эффективны были эти затраты. С другой стороны, если возможностей модификации несколько, то какую из них следует выбрать для эксперимента, чтобы получить наилучший результат? Ответ на этот вопрос можно получить с помощью теории массового обслуживания.

Разумеется, для применения теории массового обслуживания также нужно изучать и анализировать фактические данные. Но при этом приходится рассматривать не систему в целом, а каждую составную ее часть, что намного проще. Такой анализ можно выполнить до того, как обслуживающая система модифицирована. В этом и заключается практическая цель применения теории: возможность предсказать поведение системы до того, как такая система создана, т. е. еще на стадии ее проектирования.

Теперь можно сформулировать предмет теории массового обслуживания и цели, которые она преследует.

Моделирование транспортных процессов

Предметом теории массового обслуживания является количественная сторона процессов, связанных с массовым обслуживанием.

279

Таблица 10.1

Элемент системы массового обслуживания	Признак классификации	Значение, принимаемое классифицируемым признаком
Входящий поток требований	Количество источников требований Количество требований, одновременно поступающих в обслуживающую систему Описание входящего потока Поведение требований при входе в обслуживающую систему и наличии очереди в накопителе	Ограниченное, неограниченное Одно, группа Вид закона распределения Требование теряется (отказ в обслуживании); остается в накопителе или уходит в зависимости от длины очереди или времени ожидания; присоединяется к ближайшей очереди; имеет неполную информацию о состоянии очереди; соглашение между требованиями
Накопитель требований	Емкость накопителя Виды очередей Вид дисциплины очереди (порядок обслуживания)	Ограниченная, неограниченная Общие, специализированные В порядке поступления; поступивший первым обслуживается последним; случайный выбор на обслуживание; приоритет с прерыванием обслуживания Ожидание обслуживания; уход из очереди
Механизм обслуживания	Поведение требования в очереди Количество обслуживающих аппаратов Описание времени обслуживания Вид обслуживающего аппарата Размещение обслуживающего аппарата в механизме обслуживания	Один, несколько, неограниченное количество Вид закона распределения для каждого обслуживающего аппарата Однородные, неоднородные (специализированные) Объединение для обслуживания потребностей клиента; параллельно друг другу; последовательно (многофазовое обслуживание); специальное (переменное число аппаратов на каждой фазе обслуживания)
Выходящий поток требований	Описание выходящего потока Образование цикла	Вид закона распределения выходящего потока Система массового обслуживания с конечным числом источников

280

Целью теории является разработка математических методов для отыскания основных характеристик процессов массового обслуживания для оценки качества функционирования обслуживающей системы.

Классификация систем массового обслуживания приведена в табл. 10.1.

В зависимости от количества источников требований системы массового обслуживания делятся на две группы: замкнутые с ограниченным числом источников, например система экскаватор - самосвалы при вывозе грунта, и разомкнутые с неограниченным, вернее очень большим, числом источников, например система станция технического обслуживания - владельцы индивидуальных автомобилей. Большое значение для решения задач массового обслуживания имеют законы распределения входящего потока требований и времени обслуживания. С этой точки зрения системы подразделяются на пуассоновские, или марковские (требования поступают в обслуживающую систему в соответствии с законом Пуассона, а время обслуживания подчиняется

Моделирование транспортных процессов

показательному закону), и непуассоновские (при другом виде закона распределения входящего потока и (или) времени обслуживания).

В соответствии с поведением требований системы можно подразделить на три группы:

системы с отказами, в которых требование, заставшее обслуживающие аппараты занятыми, получает отказ в обслуживании и теряется (например, в системе автоматическая телефонная станция - клиенты - отказ, если в момент поступления вызова занята нужная линия связи);

система с ожиданиями: требование ждет начала обслуживания, например автомобиль ожидает погрузки;

смешанные системы, когда часть требований покидает накопитель или вообще не присоединяется к очереди в зависимости от ее длины и времени ожидания; например, часть автомобилей может уехать с автозаправочной станции, если очередь на заправку велика.

Следующим основным признаком классификации систем является дисциплина обслуживания (см. табл. 10.1), причем предоставление приоритета отдельным требованиям (классу требований) позволяет улучшить качество функционирования данной системы массового обслуживания и т. д.

Вопрос 3. Входящий поток требований. Время обслуживания

Цель деятельности любой обслуживающей системы - удовлетворение заявок (требований) на обслуживание. Поэтому поток требований является одним из основных понятий теории массового обслуживания.

Изучение потока требований является первой задачей, которая неизбежно возникает как при теоретической разработке проблем

281

массового обслуживания, так и при практическом применении ее методов к решению конкретных задач. Ведь для того, чтобы предпринять какие-либо конкретные шаги по организации обслуживающей системы с целью улучшения качества ее функционирования, необходимо сначала тщательно изучить поток требований, поступающих в эту систему.

Процесс поступления заявок на обслуживание - процесс случайный. Для его полного определения необходимо установить вид функции

$$F(t_1, t_2, \dots, t_n; k_1, k_2, \dots, k_n) = P\{x(t_1) = k_1;$$

$$x(t_2) = k_2, \dots, x(t_n) = k_n$$

для любых

$$t_1, t_2, \dots, t_n \text{ и } k_1, k_2, \dots, k_n$$

причем

$$t_1 < t_2 < \dots < t_n \text{ и } k_1 \leq k_2 \leq \dots \leq k_n$$

где t — продолжительность промежутка времени; k — количество поступающих в систему требований за время t ; $P\{\dots\}$ — вероятность того, что за время t_1 поступит k_1 требований, за t_2 — k_2 требований и т. д.

Например, вероятность того, что в течение суток в систему каждый час будет поступать только одно требование, равна

$$F(1, 2, \dots, 24; 1, 2, \dots, 24) = p \{ x(1) = 1; x(2) = 2; \dots; x(24) = 24 \}.$$

Задача определения функции $F(t_1, t_2, \dots, t_n; f_1, f_2, \dots, f_n; f_a, f_b, \dots, f_n)$ в общем случае является весьма трудной.

В данной **книге** рассматриваются лишь потоки, обладающие свойствами стационарности и ординарности.

Стационарными являются потоки, для которых вероятность поступления определенного числа требований в течение заданного промежутка времени не зависит от начала отсчета времени, но зависит от его продолжительности. Свойством стационарности обладает, например, поток требований на текущий ремонт по дням календарного периода, образованный автомобилями крупного автотранспортного предприятия.

Для многих конкретных систем обслуживания характер потока требований таков, что в любой момент времени может поступить только одно требование. Потоки, обладающие этим свойством, называются ординарными. Для ординарных потоков появление двух требований и более за малый промежуток времени t есть бесконечно малая величина более высокого порядка, чем t .

282

Поток требований называется потоком без последствия, если число требований, поступивших в систему после произвольного момента времени t , не зависит от того, какое число требований поступило в систему до момента t . Например, прибытие автомобилей в крупный пункт погрузки происходит независимо от того, когда и сколько автомобилей прибыло до этого момента.

Поток требований, одновременно обладающий свойствами стационарности, ординарности и отсутствия последствий, называется простейшим.

Для потока такого типа число требований в промежутке времени t распределено по закону Пуассона с параметром λt .

$$P(k, \lambda t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t},$$

где $P(k, \lambda t)$ – вероятность поступления за время t точно k требований; λ – параметр потока, равный математическому ожиданию числа требований, поступивших в систему за единицу времени.

Приведем основные характеристики закона Пуассона: математическое ожидание

$$M[k] = \lambda t$$

дисперсия

$$D[k] = (\lambda t)^2;$$

среднее квадратическое отклонение

$$\sigma^2 = \lambda t$$

мода

$$M_0 = k/\lambda;$$

коэффициент вариации

$$V = \lambda t / \lambda t = 1.$$

В теории массового обслуживания наиболее распространен следующий способ задания входящего потока. Пусть f_1, f_2, \dots, f_n – моменты поступления

Моделирование транспортных процессов

последовательных требований потока. Величина $t_0 = 0$ - начальный момент потока. Обозначил через $t_j = t_j - (j-1, 2, \dots, n)$ промежуток времени между $(j-1)$ -м и j -м требованиями. Поток требований будет задан, если известно время между смежными требованиями.

283

Для простейшего потока времени между смежными требованиями распределено по показательному (экспоненциальному) закону:

$$F(\theta) = P(t < \theta) = 1 - e^{-\lambda\theta}, \theta \geq 0;$$

$$f(\theta) = \lambda e^{-\lambda\theta};$$

$$M[\theta] = 1/\lambda; \quad D[\theta] = \sigma^2 = 1/\lambda^2; \quad V = 1; \quad M_0 = 0.$$

Некоторым обобщением простейшего потока является поток с ограниченным последствием, или рекуррентный поток. Стационарный и ординарный потоки называются потоками с ограниченной последствием, если промежутки между последовательными моментами поступления требований являются независимыми случайными величинами, каждая из которых имеет один и тот же закон распределения $F(Q)$. В частности, если промежутки времени могут иметь постоянную величину, то такой поток называется регулярным, или детерминированным. Если $F(0)$ имеет вид $F(\theta) = 1 - e^{-\lambda\theta}$, то поток будет простейшим.

Из других законов распределения теории массового обслуживания наибольшее распространение имеют закон Эрланга, для которого коэффициент вариации меньше единицы, гиперэкспоненциальный и, хорошо известный, нормальный закон.

Методику выбора закона распределения для аппроксимации данных, полученных в результате наблюдения, рассмотрим на конкретном примере.

Например, возьмем наблюдаемые данные об интервалах между моментами поступления автомобилей-самосвалов на базу минерально-строительных материалов за какой-то день, с: 408; 142; 170; 61; 2; 51; 7; 225; 38; 221; 74; 15; 226; 2; 6; 321; 36; 83; 2; 26; 25; 41; 123; 71; 100; 196; 87; 24; 201; 44; 116; 29; 79; 38; 3; 16; 38; 198; 107; 142; 18; 7; 147; 13; 58; 206; 3; 26; 18; 22; 67; 83; 235; 3; 276; 218; 91; 156; 53; 14; 76; 111; 26; 69; 143; 29; 193; 159; 25; 17; 133; 6; 156; 96; 49; 51; 104; 107; 6; 124; 149; 5; 3; 65; 31; 51; 66; 71; 154; 67; 92; 85; 114; 26; 15; 36; 104; 83; 75; 74; 12; 127; 57; 40; 93; 27; 1; 97; 141; 183; 178; 113; 102; 34; 222; 1; 227; 65; 390; 47; 121; 2; 69; 10; 457; 8; 102.

Аппроксимация исходного материала одним из законов распределения проводится в несколько этапов.

1. Сгруппировать полученные данные. Длина интервала группировки определяется по формуле Стерджесса или на основе последовательного подбора до тех пор, пока гистограмма, построенная по данным группировки, не будет иметь больших "провалов". Вообще же группировка всегда является в определенной степени субъективной. По формуле Стерджесса

$$\frac{\theta_{\max} - \theta_{\min}}{1 + 3,32 \lg N} ;$$

$$\frac{457 - 1}{1 + 3,32 \lg 127} = \frac{456}{1 + 3,32 \cdot 2,1038} = \frac{456}{8} = 57,1 \approx 60 \text{ с,}$$

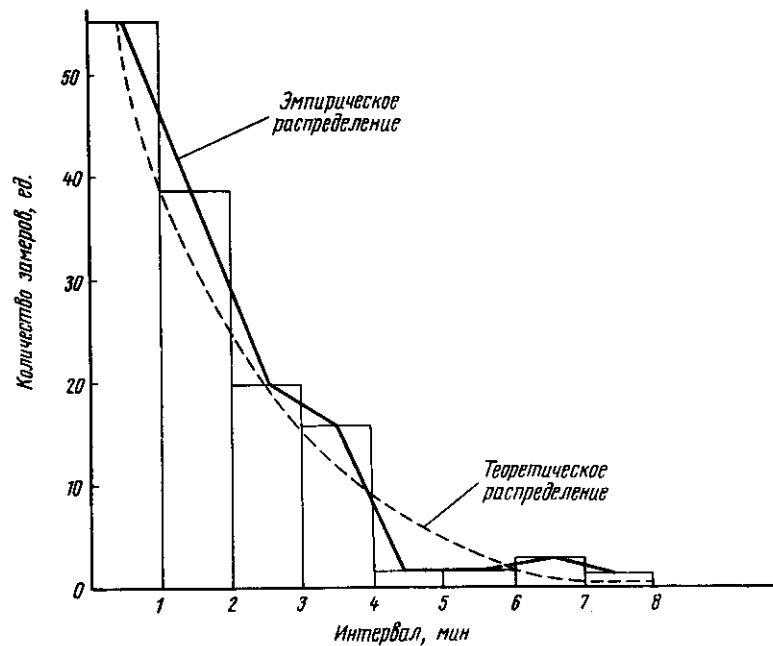


Рис. 10.2. Распределение интервалов между автомобилями-самосвалами

число интервалов равно 8, длина интервала - 60 с. Количество замеров, попадающее в тот или иной интервал группировки, определяется непосредственным подсчетом; если какой-то замер попадает на границу двух интервалов, он распределяется поровну (по 0,5) между этими интервалами. Сгруппированные данные приведены в табл. 10.2.

2. Построить эмпирическое распределение (рис. 10.2) и сравнить его внешний вид с известными теоретическими законами распределения. Сравнение показывает; что эмпирическое распределение напоминает экспоненциальный или гиперэкспоненциальный закон.

3. Определить среднюю арифметическую, дисперсию и стандартное отклонение по фактическим данным. Вспомогательные расчеты даны в табл. 10.2. Используется упрощенная методика, изложенная в [1, с. 123, 140]:

$$\bar{\theta} = \frac{\sum_t \frac{\theta_i - b}{\Delta \theta} N_i}{N} \Delta \theta + b;$$

$$\sigma_{\theta}^2 = \frac{\sum_t \left(\frac{\theta_i - b}{\Delta \theta} \right)^2 N_i}{N} (\Delta \theta)^2 - (\bar{\theta} - b)^2,$$

Моделирование транспортных процессов

где θ_i — середина i -го интервала группировки; U — общее число замеров; ω_i — число замеров в i -м интервале (частота).

285

Интервалы группировки, мин	Середина интервалов, θ , мин	Количество замеров (частота)	$\frac{\theta_i - 1,5}{1}$	$\frac{\theta_i - 1,5}{1} N_i$	$\frac{(\theta_i - 1,5)^2}{1} N_i$
0–1	0,5	56	–1	–56	56
1–2	1,5	37	0	0	0
2–3	2,5	16	1	16	16
3–4	3,5	13	2	26	52
4–5	4,5	1	3	3	9
5–6	5,5	1	4	4	16
6–7	6,5	2	5	10	50
7–8	7,5	1	6	6	36
Σ	32,0	127	–	9	235

Примечание. Методика расчета не излагается. При объединении последних четырех группа

Для непрерывных распределений АО равно длине интервала группировки, а ω — постоянное число, равное середине интервала, который делит замеры на две примерно равные части ("медианный" интервал); в данном случае $\omega = 1,5$ и $AO \ll 1$.

Средняя арифметическая

$$\bar{\theta} = \frac{9}{127} \cdot 1 + 1,5 = 0,071 + 1,5 = 1,571 \text{ мин.}$$

Дисперсия

$$\sigma_{\theta}^2 = \frac{235}{127} - (1,571 - 1,5)^2 = 1,845 \text{ мин}^2; \quad \sigma = 1,36 \text{ мин.}$$

Полученные значения являются оценками математического ожидания и дисперсии для теоретического закона распределения. Поскольку математическое ожидание и стандартное отклонение почти равны, следует для аппроксимации выбрать экспоненциальный закон распределения.

4. Выводить эмпирическое распределение по экспоненциальной кривой.

Экспоненциальный закон имеет четыре способа оценки параметра A : в качестве оценки принимается величина, обратная средней арифметической, рассчитанной по фактическим данным; графический способ; метод средних; метод наименьших квадратов.

286

Таблица 10.2

Расчет по методу наименьших квадратов ($\lambda = 0,5989$)					Расчет с использованием величины, обратной средней арифметической ($\lambda = 0,636$)			
$\lg N_i$	$\theta_i \lg N_i$	$(\theta_i)^2$	$\lg N_{\pi}$	N_{π}	$\frac{(N_i - N_{\pi})^2}{N_{\pi}}$	$\lg N_{\pi}$	N_{π}	$\frac{(N_i - N_{\pi})^2}{N_{\pi}}$
1,7482	0,8741	0,25	1,7212	52,62	0,22	1,7692	58,78	0,13
1,5682	2,3523	2,25	1,4611	28,92	2,26	1,4930	31,12	1,11
1,2041	3,0102	6,25	1,2010	15,89	0,0	1,2168	16,47	0,01
1,1139	3,8987	12,25	0,9409	8,73	2,07	0,9406	8,72	2,10
0,0	0,0	20,25	0,6808	4,80		0,6644	4,62	
0,0	0,0	30,25	0,4207	2,63	01,01	0,3882	2,44	0,63
0,3010	1,9565	42,25	0,1606	1,45		0,1120	1,29	
0,0	0,0	56,25	1,9005	0,80		1,8358	0,68	
5,9354	12,0918	170,0	—	115,84	5,56	—	124,12	3,98

Метод средних и метод наименьших квадратов более точные (но более сложные). Однако опыт показывает, что эти методы не дают никаких преимуществ по сравнению с другими.

Графический способ является субъективным, так как аппроксимирующую прямую в полулогарифмической сетке координат приходится проводить "на глаз".

Наиболее рационально для оценки параметра экспоненциального распределения использование величины, обратной средней арифметической.

Для условий данного примера

$$\lambda = 1/\bar{\theta} = 1/1,571 = 0,636 \text{ требований/мин.}$$

Экспоненциальный закон приближенно можно записать

$$N_i/N \cong \lambda e^{-\lambda \theta} \Delta \theta.$$

После логарифмирования получим

$$\lg N_i = \lg N + \lg \lambda - \lambda \theta_i \lg e + \lg \Delta \theta.$$

Подставим фактические данные

$$\lg N_{\pi} = \lg 127 + \lg 0,636 - 0,636 \cdot 0,4343 \theta_i + \lg 1;$$

$$\lg N_{\pi} = 2,1038 + 1,8035 - 0,2762 \theta_i + 0,0000 = 1,9073 - 0,2762 \theta_i,$$

где N_{π} — теоретическая частота i -го интервала.

287

Результаты расчетов см. в табл. 10.2. В той же таблице и на рис. 10.3 даны теоретические частоты экспоненциального распределения, полученные потенцированием.

Близость эмпирического и теоретического распределений можно проверить по одному из применяемых в математической статистике критериев согласия. Наиболее удобным является критерий Романовского, так как для его применения не требуется специальных таблиц. Согласно этому критерию расхождение между эмпирическим и теоретическим распределением носит случайный характер, если

$$\frac{|\chi^2 - \tau|}{\sqrt{2\tau}} < 3; \quad \chi^2 = \sum_i \frac{(N_i - N_{\tau i})^2}{N_{\tau i}},$$

где τ – число степеней свободы, равное числу групп в эмпирическом распределении без числа связей, наложенных на частоты при теоретическом распределении. Для экспоненциального закона и закона Эрланта число таких связей равно 2, а для гиперэкспоненциального и нормального законов – 3.

В математической статистике для определения χ^2 рекомендуется объединять малочисленные группы, поэтому четыре последние группы объединены в одну, для которой

$$\theta_i = 6, N_i = 5, \Delta\theta_i = 4;$$

$$\lg N_{\tau i} = \lg 127 + \lg 0,636 + \lg 4 = 0,636 + 0,4343 = 1,0703;$$

$$\lg N_{\tau i} = 2,1038 + 1,8035 + 0,6021 - 1,6572 = 2,8522;$$

$$N_{\tau i} = 7,12.$$

Результаты расчетов см. в табл. 10,2, $\chi^2 = 3,98$, $\tau = 5 - 2 = 3$.

Тогда

$$(3,98 - 3)/\sqrt{6} = 0,98/2,45 = 0,4 < 3,$$

поэтому применение экспоненциального закона распределения для аппроксимации интервалов прибытия самосвалов является правомерным. Плотность вероятности определяется

$$f(\theta) = 0,636e^{-0,636\theta}.$$

Рассмотрим пример организации работ автомобилей-самосвалов и погрузочных средств. Для аппроксимации времени обслуживания автомобилей используем выражение $1,0944e^{-1881}$, которое не является экспоненциальным законом распределения, хотя дальнейшие расчеты ведутся по формулам, для применения которых обязательно экспоненциальное распределение времени обслуживания. Исходные Данные задачи приведены в сгруппированном виде табл. 10.3.

Эмпирическое распределение показано на рис. 10.3. Сравнение эмпирического распределения с теоретическими законами показы

288

Моделирование транспортных процессов

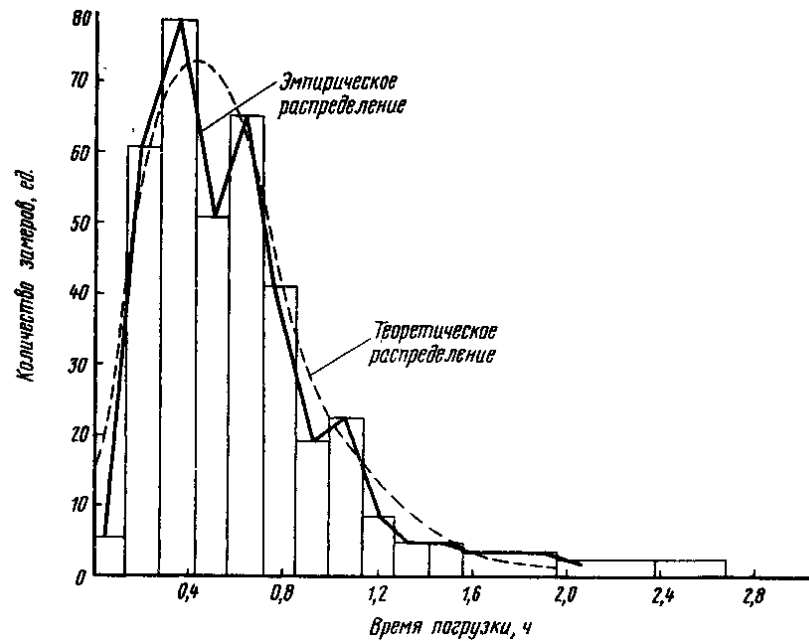


Рис. 10.3 Распределение времени погрузки

вает, что оно напоминает закон Эрланга. Определим среднюю арифметическую, дисперсию, стандартное отклонение и порядок закона Эрланга:

$$\bar{\theta} = \frac{-109,5}{364} \quad 0,14 + 0,63 = -0,042 + 0,63 = 0,59 \text{ ч;}$$

$$\sigma^2 = \frac{2456}{364} \quad 0,14^2 - 0,04^2 = 0,1323 - 0,0016 = 0,1307 \text{ ч}^2;$$

$$\sigma = \sqrt{0,1307} = 0,361 \text{ ч;}$$

$$k = (0,59)^2 / (0,361)^2 = 2,67;$$

$$v = 1/\bar{\theta} = 1/0,59 = 1,7.$$

Следовательно, аппроксимировать фактические данные можно законом Эрланга 2-го или 3-го порядка:

$$f_k(\theta) = vkP(k-1; vk\theta).$$

Плотность вероятности в середине i-го интервала

$$f_k(\theta) = vkP(k-1; vk\theta);$$

теоретическая частота

$$N_{ti} = f_k(\theta_i)\Delta\theta_i.$$

Середин на интер- вала θ_i , ч	Длина интер- вала $\Delta\theta_i$	Число замеров N_i	$\theta_i - 0,63$	$\theta_i - 0,63$	$(\theta_i - 0,63)^2$	Закон Эрланга 2-го		
			$\frac{0,14}{0,14}$	$\frac{0,14}{0,14} N_i$	$\frac{0,14}{0,14} N_i$	$vk = \theta_i$	$P(1; 3,4\theta_i)$	$f_2(\theta_i)$
0,07	0,14	5	-4	-20	80	0,238	0,1859	0,631
0,21	0,14	60	-3	-120	540	0,714	0,3493	0,187
0,35	0,14	79	-2	-158	316	1,190	0,3494	1,188
0,49	0,14	50	-1	-50	50	1,666	0,3032	1,030
0,63	0,14	65	0	0	0	2,142	0,2535	0,862
0,77	0,14	40	1	40	40	2,618	0,1958	0,666
0,91	0,14	19	2	38	76	3,094	0,1422	0,483
1,05	0,14	22	3	66	198	3,570	0,1060	0,360
1,19	0,14	8	4	32	128	4,046	0,0715	0,243
1,40	0,28	7	55	38,5	212	4,760	0,0433	0,147
1,75	0,42	6	8	48	384	5,950	0,0158	0,054
2,31	0,70	3	12	36	432	7,854	0,0032	0,011
Σ	—	364	—	-109,5	2456	—	—	—

Для определения $P(k - 1; vk\theta_i)$ использована таблица закона Пуассона, для промежуточных значений $vk\theta_i$ применялась линейная интерполяция.

Последовательность расчетов показана на примере аппроксимации законом Эрланга 2-го порядка для первого интервала группировки табл. 10.3.

1. Определить: $vk\theta_i$; $v = 1,7$; $k = 2$; при $\theta_i = 0,07$ $vk\theta_i = 1,7 \cdot 2 \cdot 0,07 = 0,238$ и т. д.

2. Установить по таблице закона Пуассона:

$$P(k - 1; vk\theta_i) = P(1, 3, 4 \theta_i);$$

$$P(1; 0,238) = 1,1637 + \frac{0,2222 - 0,1637}{0,1} \cdot 0,038 = 0,1859,$$

где $0,1637 = P(1; 0,2)$ и $0,2222 = P(1; 0,3)$.

3. Рассчитать плотность вероятности в середине каждой группы:

$$f_2(\theta_i) = vkP(1; vk\theta_i);$$

$$f_2(0,07) = 3,4 \cdot 0,1859 = 0,631.$$

Таблица 10.3

порядка ($v = 1,7; k = 2$)			Закон Эрланга 3-го порядка ($v = 1,7; k = 3$)					
$\Delta\theta_i f_2(\theta_i)$	N_{Ti}	$\frac{(N_i - N_{Ti})^2}{N_{Ti}}$	$5,1\theta_i$	$F(2; 5,1\theta_i)$	$f_3(\theta_i)$	$\Delta\theta_i f_3(\theta_i)$	N_{Ti}	$\frac{(N_i - N_{Ti})^2}{N_{Ti}}$
0,088	32	22,78	0,357	0,0449	0,229	0,032	12	4,08
0,166	60	0,0	1,071	0,1901	0,970	0,136	50	2,00
0,166	61	5,31	1,785	0,2521	1,285	0,180	66	2,56
0,144	52	0,08	2,499	0,2474	1,260	0,176	64	3,06
0,121	44	10,02	3,213	0,2075	1,060	0,148	54	1,50
0,093	34	1,06	3,927	0,1522	0,776	0,109	40	0,0
0,068	25	1,44	4,641	0,1066	0,543	0,076	28	2,89
0,050	18	0,89	5,355	0,0702	0,358	0,050	18	0,80
0,034	12	1,33	6,069	0,0431	0,220	0,031	11	0,82
0,041	15	4,26	7,140	0,0207	0,106	0,030	11	1,45
0,023	8	0,50	8,925	0,0054	0,026	0,011	4	1,00
0,008	3	0,00	11,781	0,0006	0,003	0,002	1	4,00
—	364	47,67	—	—	—	—	359	24,25

4. Вычислить вероятность для каждого интервала группировки по выражению $\Delta\theta_i f_2(\theta_i)$, где $\Delta\theta_i$ – величина интервала для i -й группы. Для первой группы $0,14 - 0,631 = 0,0883$.

5. Определить теоретические частоты:

$$N_{Ti} = (\sum_i N_i) [\Delta\theta_i f_2(\theta_i)],$$

где $\sum N_i = N$ – общее число замеров; $N_{Ti} = 364 \cdot 0,0883 = 32$; $\sum N_{Ti} = 364$, однако эта величина может не совпадать с общим фактическим числом замеров, например при аппроксимации законом Эрланга 3-го порядка $\sum N_{Ti} = 359$. Расхождения получаются из-за округлений при расчетах до целых значений N_{Ti} и приближенного определения вероятностей по выражению

$$\Delta\theta_i f_k(\theta_i).$$

6. Определить

$$(N_i - N_{Ti})^2 / N_{Ti}$$

для первой группы:

$$(5 - 32)^2 / 32 = 729 / 32 = 22,78;$$

$$\sum_i \frac{(N_i - N_{Ti})^2}{N_{Ti}} = \chi^2; \chi^2 = 47,67.$$

291

Результаты расчетов см* в табл. 10.3. Там же приведена аппроксимация с использованием закона Эрланга 3-го порядка. Полученные значения теоретических частот для закона Эрланга 3-го порядку находятся ближе к практическим значениям, чем теоретические расчеты закона 2-го порядка;

Моделирование транспортных процессов

величина χ^2 рассчитанная для закона Эрланга 3-го порядка, почти в два раза меньше, чем для аналогичного закона 2-го порядка. Следовательно, для аппроксимации времени погрузки нужно выбрать закон Эрланга 3-го порядка.

Попытки уменьшить величину χ^2 и улучшить приближение за счет изменения параметра ν дали следующие результаты:

$$\begin{aligned} \nu &= 1,7; & \chi^2 &= 24,25; \\ \nu &= 1,65 \text{ (снижение на 3 \%)} & \chi^2 &= 29,23; \\ \nu &= 1,72 \text{ (увеличение на 1 \%)} & \chi^2 &= 24,98; \\ \nu &= 1,75 \text{ (увеличение на 3 \%)} & \chi^2 &= 26,93. \end{aligned}$$

Эти данные показывают, что изменение параметра не приводит к лучшему приближению.

Проверка по критерию Романовского

$$(24,25 - 10)/20 = 14,25/4,48 = 3,18 > 3$$

дает отрицательный результат, однако если учесть, что треть величины χ^2 (8,08) попадает на две крайние малочисленные группы, то можно считать приемлемой аппроксимацию времени погрузки законом Эрланга 3-го порядка:

$$f_3(\theta) = \frac{5,13\theta^2 e^{-5,1\theta}}{2!} = 66,8\theta^2 e^{-5,1\theta}.$$

Близость теоретического распределения к фактическим данным подтверждается и рис. 10.3.

Контрольные вопросы:

1. Какие системы называют системами массового обслуживания?
2. Примеры систем массового обслуживания.
3. Состав системы массового обслуживания.
4. Предмет теории массового обслуживания.
5. Типы систем массового обслуживания?
6. Открытые и закрытые системы массового обслуживания.
7. Основная задача теории массового обслуживания.
8. Классификация систем массового обслуживания.
9. Цель деятельности любой обслуживающей системы.

Лекция 17. Использование имитационного моделирования и деловых игр при анализе производственных ситуаций и принятии решений.

Вопросы лекции:

1. Предпосылки и условия применения имитационного моделирования.
2. Применение имитационного моделирования при решении технологических и управленческих задач.
3. Деловые (хозяйственные) игры.

Вопрос 1. Предпосылки и условия применения имитационного моделирования

Принятие решений в сложных производственных и рыночных условиях связано со следующими организационными и методическими трудностями.

Во-первых, это традиционный дефицит информации и времени для принятия решения.

Во-вторых, в реальном производстве большинство величин являются случайными с разными, а часто и неизвестными законами распределения, и взаимодействует, как правило, не две, а несколько случайных величин. Поэтому чисто аналитические расчеты затруднены или невозможны.

В-третьих, опасность и большая стоимость проведения натурных экспериментов на реальной системе с целью оценки вариантов решений, так как система работает в реальном масштабе времени и взаимодействует с многочисленными партнерами и клиентурой потребителями продукции и услуг.

В-четвертых, практическая невозможность обеспечения условий сопоставимости при натурном эксперименте, так как он предполагает сравнение двух или нескольких вариантов решений. При сравнении вариантов решений на двух или нескольких предприятиях невозможно обеспечить их равные условия, так как абсолютно сопоставимые аналоги (другие АТП, СТО и т.д.) отсутствуют. Последовательное сравнение нескольких решений на одном производстве также затруднено из-за неминуемого изменения во времени других факторов, влияющих на показатели эффективности, например, спрос на услуги, цены, условиях эксплуатации.

В этих условиях при принятии решений можно применять методы исследования и оценки систем на моделях.

Модель - это упрощенная форма представления реальных производственных или рыночных процессов и взаимосвязей в системе, позволяющая изучить, оценить и прогнозировать влияние внешних факторов и составляющих элементов (подсистем) на поведение системы в целом, т.е. изменение целевых показателей.

Модели могут быть физическими, математическими, логическими, имитационными и др.

146

При решении технологических и организационных задач, когда действует много факторов, в том числе и случайных, информация не полная, распространение получил метод имитационного моделирования. Имитировать - значит вообразить, постичь суть явления, не прибегая к физическим экспериментам на реальном объекте.

Моделирование транспортных процессов

Имитационное моделирование - это процесс конструирования модели реальной системы и постановка эксперимента на этой модели с целью:

- понимания механизма функционирования системы и взаимодействия подсистем,
- выяснения характера реакции системы на изменение внешних факторов;
- сравнительной оценки различных стратегий функционирования системы;
- оценки показателей эффективности системы (целевых показателей).

Имитационное моделирование может производиться: вручную и на ЭВМ.

Процесс имитации включает следующие основные этапы:

- 1) Описание системы, т.е. установление внутренних взаимосвязей границ, ограничений и показателей эффективности системы, подлежащей изучению.
- 2) Конструирование модели - переход от реальной системы к определенной логической схеме, отображающей процессы, происходящие в системе.
- 3) Подготовка и отбор данных, необходимых для построения и работы модели.
- 4) Трансляция модели, включающая описание модели на языке, используемом ЭВМ.
- 5) Оценка адекватности, позволяющая судить о корректности выводов, полученных на модели, для реальной системы.
- 6) Планирование экспериментов: объемов, последовательности.
- 7) Экспериментирование, заключающееся в реализации на модели имитации реальных процессов и получение необходимых данных.
- 8) Интерпретация - получение выводов по результатам моделирования.
- 9) Реализация - практическое использование модели и результатов моделирования при принятии решения для реальной системы.

147

Вопрос 2. Применение имитационного моделирования при решении технологических и управленческих задач.

Рассмотрим *принципы* имитационного моделирования на примере системы массового обслуживания (СМО), состоящей из одного поста, на который поступают автомобили, требующие ремонта или обслуживания.

Прежде всего, напомним из дисциплины «Техническая эксплуатация автомобилей», что СМО - это система, в которой случайными являются моменты поступления требований на обслуживание и продолжительность самих обслуживаний.

1. ХАРАКТЕРИСТИКА ИМИТИРУЕМОЙ СИСТЕМЫ И ПОСТАВЛЕННОЙ ЗАДАЧИ

1) В течение смены $T_{см}$ на пост поступают автомобили с теми или иными требованиями на ТО или ремонт. Моменты и интервалы между требованиями t_{ij} случайны (рис. 37а) и подчиняются определенному закону распределения $f(t_m)$, чаще всего экспоненциальному (рис. 37б).

2) Так как техническое состояние автомобилей различно, а требования в общем виде имеют разное содержание и сложность, то продолжительность их выполнения также случайна (рис. 37в) и описывается определенным законом

Моделирование транспортных процессов

распределения $f(tp)$. Чаще всего нормальным, логарифмически нормальным, Вейбулла или экспоненциальным.

3) В рассматриваемом примере СМО взаимодействуют отказавшие автомобили и пост, на котором выполняются определенные требования по ТО или ремонту этих автомобилей.

При этом после поступления на пост 1-го требования возможны три варианта развития событий (рис. 38):

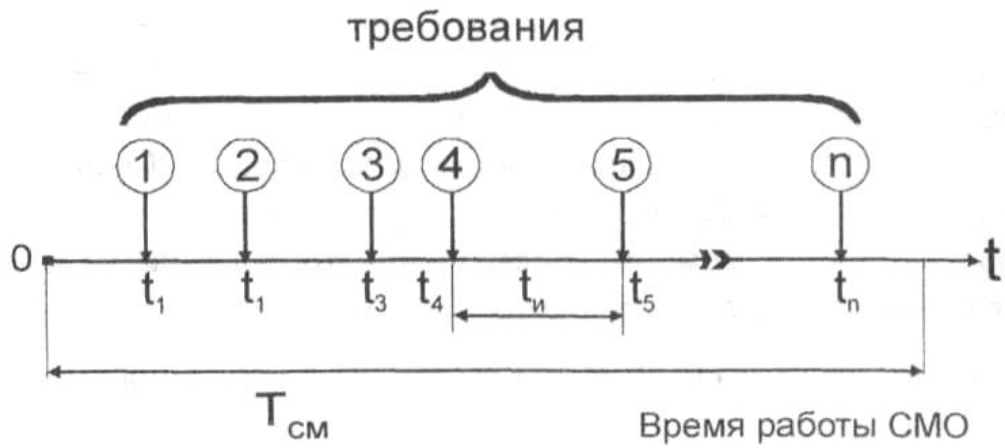
I Второе требование поступает в систему обслуживания с интервалом t^*2 через некоторое время после завершения выполнения 1-го требования.

В этом случае имеет место простой поста в ожидании 2-го требования, равный $t_{nn2} = t_{m2} - t_{pi}$ при $t_{,2} > t_{pi}$. В общем виде:

$$\left. \begin{aligned} t_{nn}(i+1) &= t_{и}(i+1) - t_p(i) \\ t_{и}(i+1) &> t_p(i) \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

Моделирование транспортных процессов

а – поток требований на обслуживание (ремонт)



б – распределение интервалов между требованиями



в – распределение продолжительности выполнения требований



Рис 37 Формирование случайных величин при работе поста

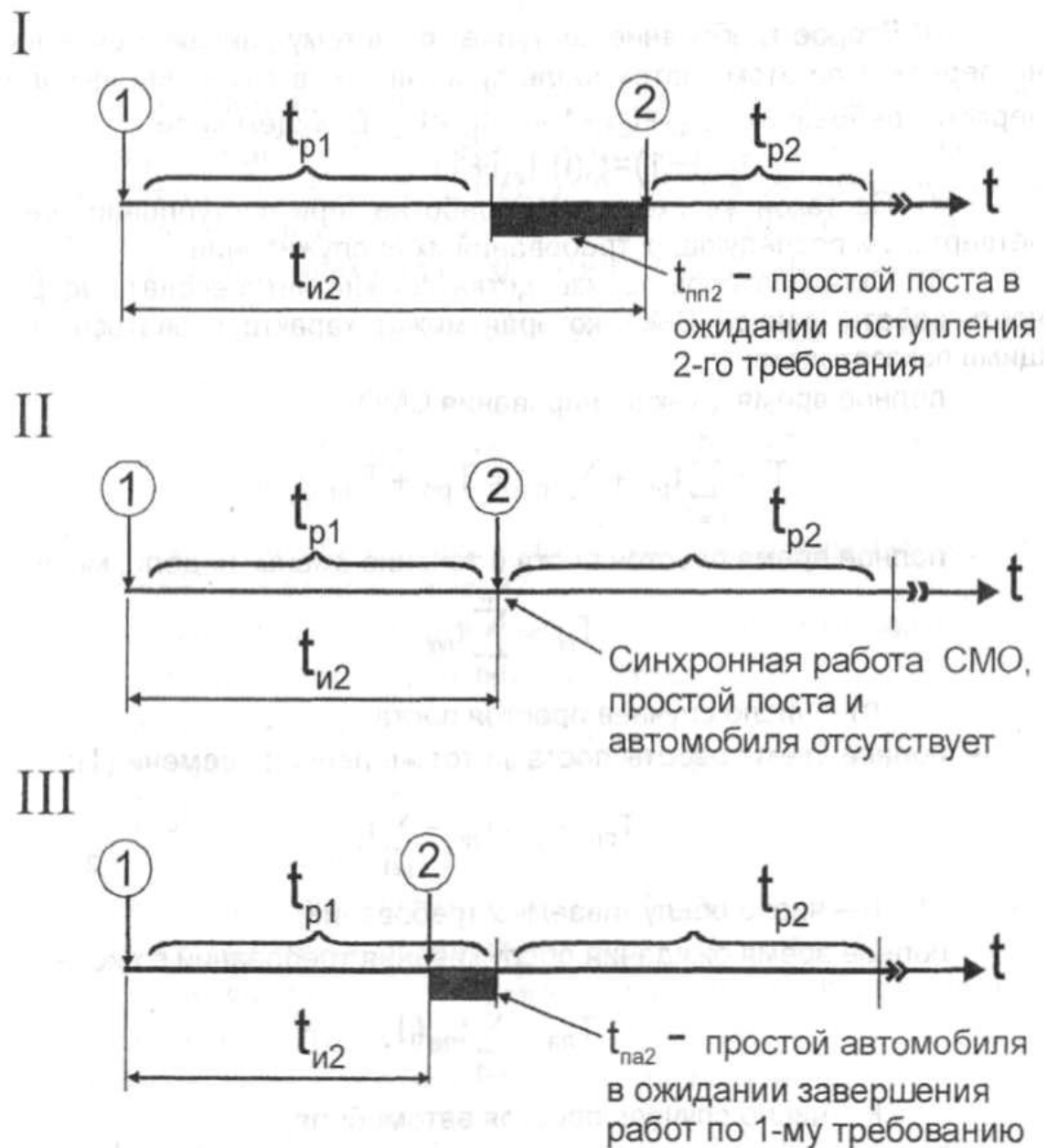


Рис. 38. Варианты (I, II, III) взаимодействия потока требований и их обслуживание в СМО

① – первое требование

② – второе требование

t – время работы СМО.

II Второе требование возникает в момент завершения работ по обслуживанию 1-го требования. Очевидно, в этом случае СМО работает синхронно, т.е. нет простоев поста и автомобиля:

$$\begin{aligned} & t_{p1} = t_{и2}; \quad t_{пн2} = 0; \quad t_{на2} = 0. \\ \} \text{ в общем виде } & t_{pi} = t_{и(i+1)}; \\ & t_{пн(i+1)} = 0; \quad t_{на(i+1)} = 0 \end{aligned} \quad (43)$$

Моделирование транспортных процессов

III Второе требование поступает в систему раньше, чем выполнено первое. При этом автомобиль простаивает в ожидании выполнения первого требования $t_{\text{па}2} = t_{\text{р}1} - t_{\text{и}2}$, $t_{\text{р}1} > t_{\text{и}2}$. В общем виде:

$$t_{\text{па}2}(i+1) = t_{\text{р}1}(i) - t_{\text{и}}(i+1) \quad (44)$$

4) По такой же схеме СМО работает при поступлении третьего, четвертого и последующих требований их обслуживании.

5) Организаторов производства должна интересовать эффективность работы данной СМО, которая может характеризоваться следующими показателями:

- полное время функционирования СМО:

$$T = \sum_{n=1}^n t_{\text{р}n} + \sum_{i=1}^m t_{\text{нн}i} = T_{\text{р}n} + T_{\text{нн}} \quad (45)$$

- полное время простоя поста в течение смены, недели, месяца:

$$T_{\text{нн}} = \sum_{i=1}^m t_{\text{нн}i} \quad (46)$$

m - число случаев простоя поста;

- полное время работы поста за тот же период времени (T):

$$T_{\text{р}n} = T - T_{\text{нн}} = \sum_{i=1}^n t_{\text{р}n} \quad (47)$$

n - число обслуживаемых требований;

- полное время ожидания обслуживания требований в системе:

$$T_{\text{па}} = \sum_{i=1}^k t_{\text{па}}(i) \quad (48)$$

k - число случаев простоя автомобиля;

- среднее значение продолжительности разовых реализаций:

$$\begin{aligned} &\bullet \text{ простоя поста} \\ &(49) \quad \bar{t}_{\text{нн}} = \frac{\sum_{i=1}^m t_{\text{нн}}(i)}{m} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\bullet \text{ работы поста} \\ &\bar{t}_{\text{р}n} = \frac{\sum_{i=1}^n t_{\text{р}n}}{n} \quad (50) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\bullet \text{ ожидания обслуживания} \\ &\bar{t}_{\text{па}} = \frac{\sum_{i=1}^k t_{\text{па}}(i)}{k} \quad (51) \end{aligned}$$

- вероятность соответствующих событий и др.

6) В рассмотренной схеме состояние СМО последовательно рассматривается в моменты возникновения $(i+1)$ требования, а критерием для определения состояния системы является соотношение $t_{\text{и}}(i+1)/t_{\text{р}j}(i)$.

151

Иными словами, начало отчета времени как бы последовательно переносится в очередной момент возникновения требований.

Такие имитационные модели называются моделями, использующими переменный временной шаг или шаг до следующего события (появления

Моделирование транспортных процессов

требований). При этом состояние моделируемой системы обновляется с появлением каждого нового события независимо от интервала времени между этими событиями.

По словам Т.Х. Нейлора, моделирование протекает в этом случае во времени событий.

2. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ ПОСТРОЕНИЯ МОДЕЛИ И МОДЕЛИРОВАНИЯ РАБОТЫ СМО

1) Графическое или аналитическое представления схемы взаимодействия случайных величин (рис. 37, 38).

2) Формирование массивов случайных величин, которые обозначаются символом $[x]$. В примере имеем массивы:

- времени выполнения требований $[t_pj]$;
- интервалов между возникновением требований на обслуживание $[t_j]$.

Массивы могут формироваться из:

- данных фактических наблюдений, т.е. содержать в своем составе комплект конкретных значений $t_{p1}, t_{p2}, \dots, t_{pn}; t_{m1}, t_{m2}, t_{m3} \dots t_m$; расчетных значений, полученных из законов распределения случайных величин $f(t_p)$ и $f(t_m)$;
- генерированием, с использованием случайных чисел.

Схема получения расчетных значений по законам распределения случайных величин приведена на рис. 39.

3) Имитационное моделирование процесса работы СМО, включающее следующие этапы (рис. 40, 41).

1 - Установка начального (нулевого) состояния, соответствующего положению, при котором 1-ое требование поступает в самом начале работы СМО, т.е. при $t=0$ (рис. 40). В принципе можно рассмотреть случай начала обслуживания первого требования при $t>0$. Это усложнит модель, не увеличивая существенно ее точность.

2 - Извлечение (рис. 41) из массива данных $[t_p]$ или генерирование, используя случайные числа и соответствующий закон распределения (рис. 39), продолжительность выполнения очередного требования $t_p(i)$.

152

3 – Извлечение из массива данных $[t_i]$ или генерирование (рис. 40, 41) интервала возможного появления $(i+1)$ -го требования

Моделирование транспортных процессов

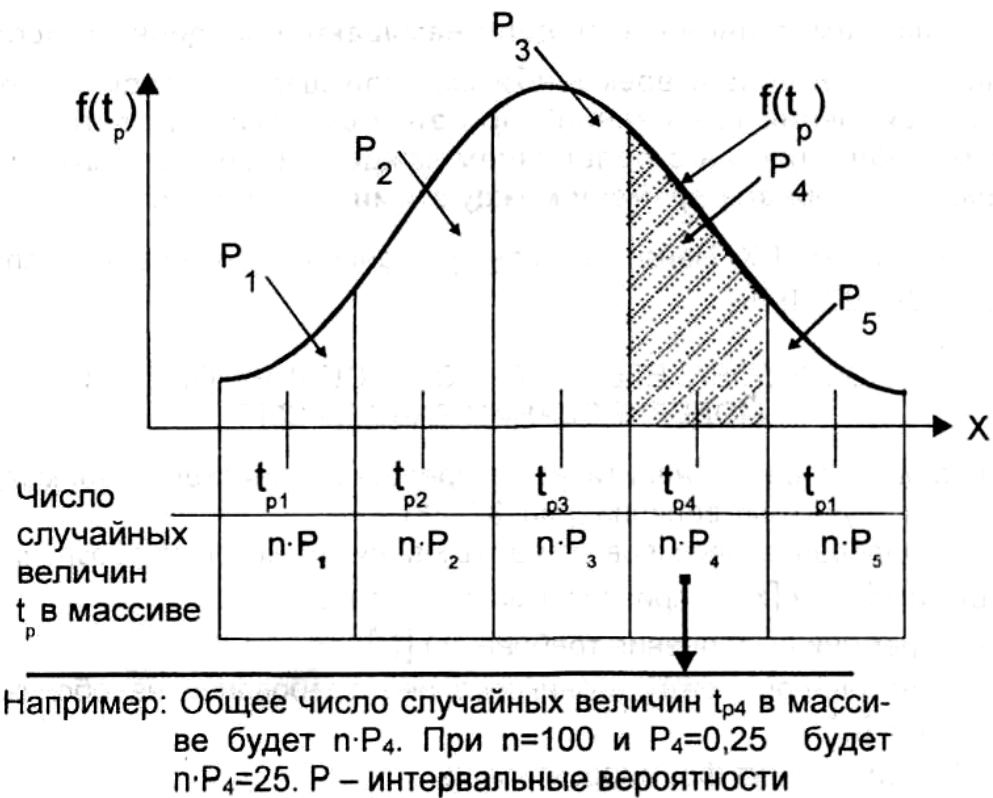


Рис. 39. Схема формирования массива данных по закону распределения случайных величин

- 4 – Сравнение $t_p(i)$ и $t_n(i+1)$.
- 5 – При $t_p(i) > t_n(i+1)$ время простоя поста отсутствует $t_{np}(i+1)=0$.
- 6 – Определяем время ожидания выполнения очередного требования т.е. простоя в очереди автомобиля $t_{па}(i+1)=t_p(i)-t_n(i+1)$.
- 7 – Определение накопления времени ожидания выполнения требований $T_{па}(i+1)=T_{па}(i)+t_{па}(i+1)$.
- 8 – При $t_n(i+1)=t_{n1}$ простои поста и автомобиля в ожидании обслуживания отсутствуют, т.е., $t_{np}(i+1)=0$, $t_{па}(i+1)=0$.
- 9 – Этот вариант также не увеличивает накопленного времени простоя поста.
- 10 – При $t_p(i) < t_n(i+1)$ простой очередного автомобиля в ожидании выполнения требования отсутствует, т.е. $t_{па}(i+1)=0$.
- 11 – Определение время простоя поста в ожидании ремонта $t_{np}(i+1)=t_n(i+1)-t_p(i)$.
- 12 – Определение накопленное время простоя поста $T_{np}(i+1)=T_{np}(i)+t_{np}(i+1)$.

Моделирование транспортных процессов

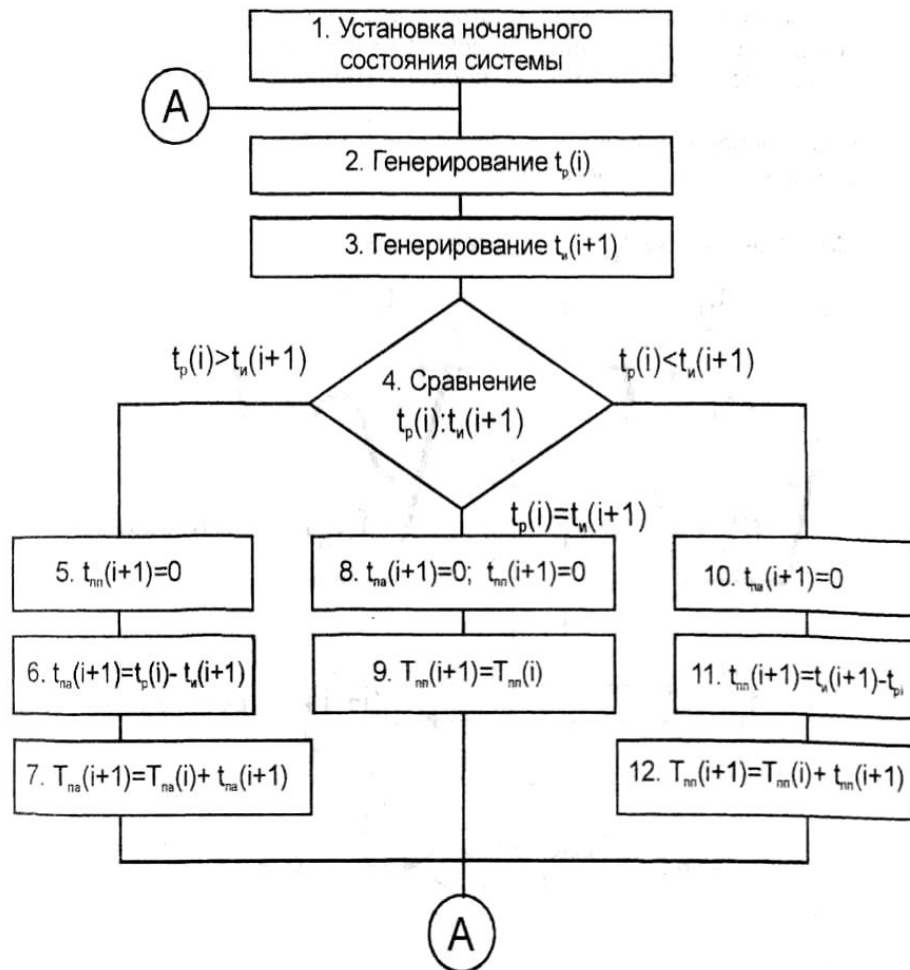


Рис. 40. Блок-схема имитационного моделирования работы поста ТО и ремонта одноканальной СМО

4) Рассмотренные на рис. 40 циклы имитационного моделирования (начиная с блока 2) повторяются многократно. При этом определяются: число соответствующих реализаций: простоев поста, простоев автомобиля, синхронной работы СМО;

определяются принятые показатели эффективности СМО (см. (5) в п. 1).

5) Рассмотренная модель может быть дополнена оценкой экономических последствий вариантов: получению дохода при загрузке поста, убытков при простое поста и автомобиля и др.

154

6) По результатам моделирования разрабатываются и реализуются меры по совершенствованию работы СМО:

- увеличение пропускной способности (механизация, увеличение численности исполнителей, продолжительности работы проста и др);
- регулирование поступления требований в СМО;
- увеличение числа постов и др.

Моделирование транспортных процессов

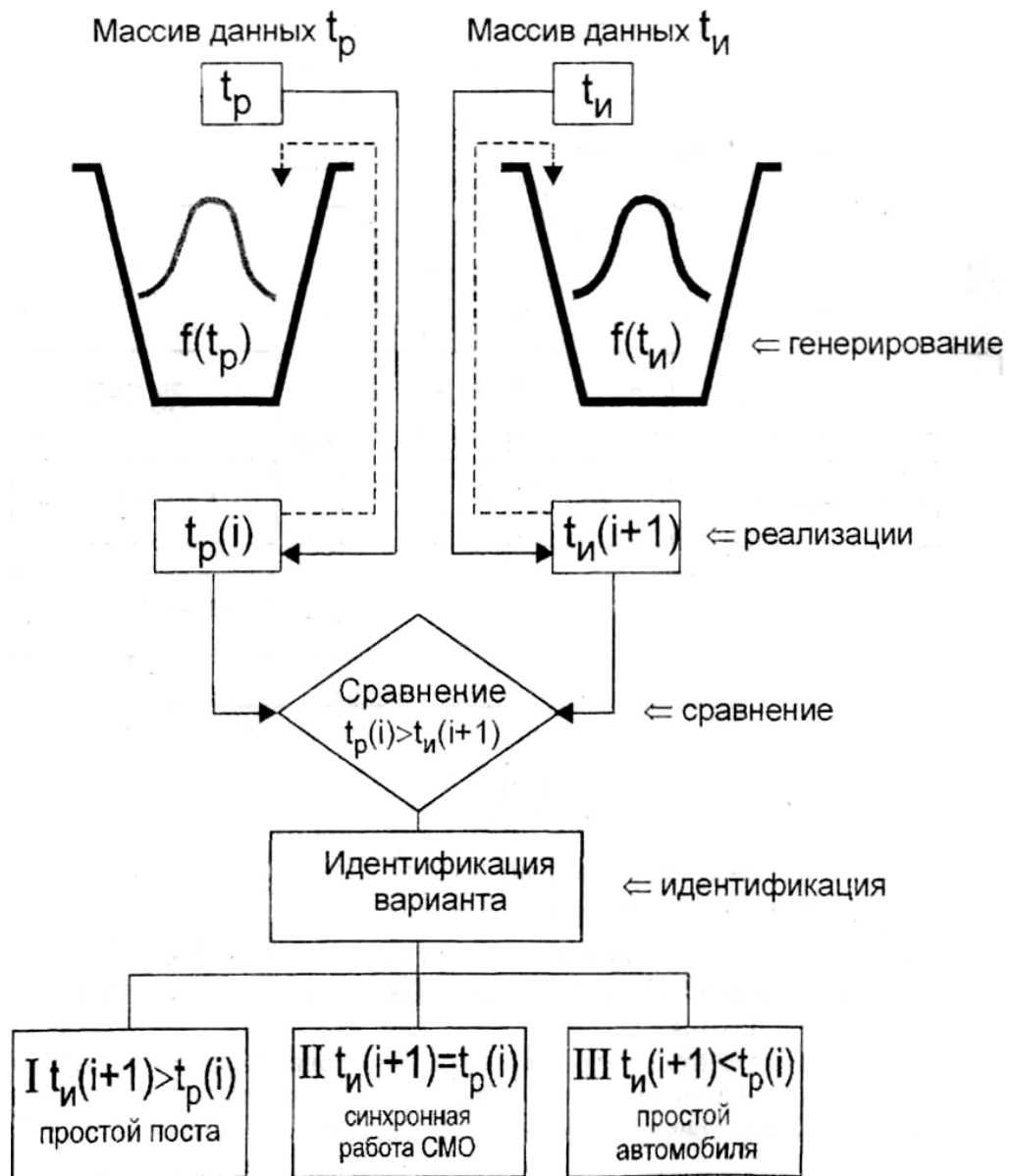


Рис. 41. Схема генерирования реализаций, сравнения случайных величин и идентификации вариантов работы СМО

155

3. ОЦЕНКА И СФЕРЫ ПРИМЕНЕНИЯ МЕТОДА

1. Преимущества:

- оперативность;
- малая трудоемкость и стоимость;
- сокращение влияния «человеческого фактора»;
- возможность многократного повторения опытов;
- создание сопоставимых условий при проведении сравнения вариантов

решения и др.

2. Недостатки:

- сложность построения адекватной модели;
- модель лишь примерно отражает реальную производственную ситуацию;
- при построении модели используются прошлые данные о системе, а решения и оценки принимаются о будущем системы.

Моделирование транспортных процессов

3. Сферы применения метода:
 - сложные производственные ситуации;
 - сравнительная оценка альтернативных решений;
- оценка действий различных факторов. Примеры применения:
 - разработка нормативов ТЭА, периодичности, трудоемкости, числа постов;
 - оценка пропускной способности средств обслуживания и методов её повышения;
 - определение запасов топлив, материалов, деталей;
 - оценка вариантов технологических процессов ТО и ремонта;
 - резервирование площадей, автомобилей, оборудования;
 - анализ возрастной структуры парков;
 - определение момента списания или продажи изделия.
 - оценка эффективности системы массового обслуживания (СМО) и ДР-

Вопрос 3. Деловые (хозяйственные).

Возможность оценивать варианты решений, изменять входные Данные, при необходимости упрощать ситуации позволяет использовать имитационное моделирование при обучении персонала и оценке его квалификации. Например:

- При исследовании производительности СМО (постов, участков) участником деловой игры может реализовываться определенная дисциплина очереди: пропускать в первую очередь требования на ремонт автомобилей, дающих наибольший доход, или требования с малой продолжительностью обслуживания.
- В многоканальных системах возможно перераспределение требований или исполнителей по постам.

156

- С помощью комбинации ряда подобных моделей конструируют имитационные модели зоны, участка, цеха и предприятия и др.
- Имитационные модели используются при проведении деловых игр.

Деловые (хозяйственные) игры - это метод имитации анализа, принятия и реализации управленческих решений в различных производственных ситуациях.

1) При этом обучающемуся создают ту или иную управленческую или производственную ситуацию, из которой необходимо найти рациональный выход, т.е. принять решение.

2) Критерием является степень приближения решения к оптимальному (которое известно организаторам деловых игр) и время принятия решения.

3) Деловые игры проводятся по определенным правилам, регламентирующим поведение участников, их взаимодействие, критерии эффективности.

4) В роли датчиков, имитирующих реальные производственные ситуации, выступают ЭВМ (человеко-машинная система), наборы карточек случайных событий или ситуации, создаваемые организаторами деловой игры

5) В деловых играх участвуют специалисты, которые в создаваемых имитационной моделью "производственных ситуациях" принимают решения.

Деловые игры используются при обучении и оценке персонала и исследовании сложных производственных систем.

При обучении персонала они используются:

Моделирование транспортных процессов

- для иллюстрации, разъяснения определенных закономерностей, понятий и закрепления знаний;
- для программного и целевого обучения определенных специалистов, например, бригадира, диагноста, оператора и др.;
- для тренировки специалистов и аварийных бригад в условиях нестандартных «производственных» ситуациях.

При обучении персонала деловые игры, как правило, разворачиваются в реальном масштабе времени. При исследовании производственных ситуаций применяется сжатый масштаб времени.

Деловые игры позволяют осуществлять предварительный отбор кадров, так как при этом можно оценить способности, профессиональные навыки и знания, пригодность кандидатов на определенные рабочие места и должности специалистов и управленцев.

Завершая данную тему необходимо ещё раз подчеркнуть, что даже хорошо сконструированные модели только примерно отражают функционирование больших систем. Поэтому к полученным с помощью этого метода данным, особенно прогнозам для больших и сложных систем следует относиться с большой осторожностью.

157

Например, при использовании двух широко применяемых в Европе моделей расхождение в оценке ущерба от среднего легкового автомобиля для парка Бельгии составило 10 - 33% (табл. 36).

Таблица 36

Оценка экологического ущерба от среднего легкового автомобиля

Применяемые модели	Ущерб в услов1 евроц чях эксплуатации, енты/км			
	Магист- раль	Большой город	Небольшо й город	Сельская местность
I (INFRAS)	0,9	4,5	1,7	0,7
II (MEET)	1,0	6,7	2,5	0,6
Разница в оценках, %	10	33	32	14

Контрольные вопросы:

1. Трудности, с которыми связан процесс принятия решений в сложных производственных и рыночных условиях.
2. Дать определение понятия «Модель».
3. Виды моделей при исследовании сложных производственных ситуаций.
4. В чем состоит смысл имитационного моделирования.
5. Основные этапы имитационного моделирования.
6. Принципы имитационного моделирования.
7. Преимущества имитационного моделирования.
8. Недостатки имитационного моделирования.
9. Сферы применения имитационного моделирования.
10. Охарактеризовать понятие «Деловые (хозяйственные) игры».
11. Области использования деловых игр.

Лекция 18. Использование игровых методов при принятии решений в условиях риска и неопределенности.

Вопросы лекции:

1. Понятие об игровых методах.
2. Принятие решений в условиях риска.
3. Принятие решений в условиях неопределенности.
4. Особенности принятия решения в конфликтных ситуациях.

Вопрос 1. Понятие об игровых методах.

Одним из методов принятия решений в условиях дефицита информации является анализ рыночной, производственной или другой ситуации с использованием теории игр и статистических решений. Смысл и содержание игры состоит в следующем:

1) Для того, чтобы произвести математический анализ ситуации, строят ее упрощенную, очищенную от второстепенных деталей модель, называемую игрой.

2) В игре функционируют стороны и рассматриваются (воспроизводятся) их возможные стратегии, т.е. совокупность правил, предписывающих определенные действия в зависимости от ситуации, сложившейся в ходе игры.

3) Если в игре выступают две стороны, то такая игра называется парной. Если в игре участвуют несколько участников, то игра называется множественной.

4) Различают игры конфликтные (антагонистические) и "игры с природой"

5) В конфликтных играх (конкуренция, спортивные соревнования, военные действия) стороны осмысленно противодействуют друг другу. Выигрыш одной стороны означает проигрыш другой.

6) Игры с природой применяются при изучении производственных ситуаций, т.е. организационных, технических и технологических задач. Их называют также играми с производством.

7) В играх с природой (производством) обычно рассматриваются две стороны:

А - организаторы производства (активная сторона), т.е. руководители ИТС АТП, станций технического обслуживания, других предприятий всех форм собственности, предоставляющих услуги потребителям;

П - совокупность случайно возникающих производственных или рыночных ситуаций ("природа").

8) Смысл игры состоит в следующем:

а) Активная сторона должна выбрать такую стратегию, т.е. принять решение, чтобы получить максимальный эффект.

б) При этом "природа" т.е. складывающиеся производственные ситуации, активно и осмысленно не противодействует мероприятиям организаторов производства, но точное состояние "природы" (П) им неизвестно.

в) Принятие решений игровыми методами основывается на определенных правилах, которые регламентируют возможные варианты (стратегии) действия сторон, участвующих в игре: нали

130

чие и объем информации каждой стороны о поведении другой; результат игры, т.е. изменение целевой функции при сочетаниях определенных стратегий сторон и др.

г) В процессе игры сторона А или стороны оценивают ситуацию, принимают решения, делают ходы, т.е. предпринимают определенные действия по изменению ситуации в свою пользу. Ходы бывают личными - сознательный выбор стороны из возможных вариантов действий. Случайными - это выбор из ряда возможных, определяемый механизмом вероятностного отбора вариантов, а не самим участником игры. Смешанные ходы представляют комбинацию личных и случайных. Если число возможных стратегий ограничено, то игры называются конечными, а при неограниченном числе стратегий - бесконечными.

д) Результаты этих ходов оцениваются количественно по изменению целевой функции:

В зависимости от содержания информации в теории игр рассматриваются методы принятия решений в условиях риска и неопределенности.

Вопрос 2. Принятие решений в условиях риска.

Используя понятие целевой функции (формула 21. §15), задача выбора решения в условиях риска формулируется следующим образом: при заданных условиях a_n и действии внешних факторов Z_i , вероятность появления которых известна, найти элементы решений x_T , по возможности обеспечивающих получение экстремального значения целевой функции.

Рассмотрим применение игровых методов на примере определения оптимального запаса агрегатов на складе АТП или СТО.

1) Определение сторон в игре. Очевидно, сторонами в игре являются: производство (П), которое в заданных условиях и в случайном порядке «выдает» то или иное число требований на замену (ремонт) агрегатов определенного наименования; - организаторы производства (А), в данном случае организаторы складского хозяйства, комплектуют тот или иной запас агрегатов. Следовательно, имеем вариант парной игры с природой

2) Идентификация групп факторов целевой функции (формула 21):

a_n - заданные условия - это размер парка, тип, состояние и условия эксплуатации автомобилей, состояние и обустройство базы (цех, участок) для ТО и ремонта, квалификация персонала Эта группа факторов, во-первых, определяет поток требований на обслуживание или ремонт, во-вторых, пропускную способность средств обслуживания и стоимость самого обслуживания требований;

131

- применительно к организации складского хозяйства это возникновение того или иного числа требований на замену агрегатов, вероятность которого известна заранее;

x_T - решение организаторов производства (А), т.е. в рассматриваемом примере - рациональный запас агрегатов, который должен поддерживаться на складе.

3) Определение вероятности появления потребности в ремонте (замене) определенного числа агрегатов q_j .

Вероятность может быть определена; а) расчетно на основе данных по надежности агрегата в рассматриваемых условиях эксплуатации. Так, для случая простейшего потока требований вероятность возникновения числа требований $k=0, 1, 2, \dots$ за время t определяется по формуле Пуассона

$$P_k(t) = \frac{(\omega t)^k}{k!} \cdot e^{-\omega t},$$

(33)

где ω - параметр потока требований $\omega = 1/\bar{x}$.

\bar{x} - средняя наработка отказа, фиксируемого данным требованием.

При расчете за смену ($t=1$) формула преобразуется:

$$P_{ka} = \frac{a^k}{k!} \cdot e^{-a},$$

где a - среднее число требований на ремонт (замену), приходящееся на одну смену.

Например, при $a=3$ вероятность отсутствия требований на ремонт в течение смены равна: $P_0 = \frac{3^0}{0!} \cdot e^{-3} = 0,05$; вероятность

возникновения одного требования $P_1 = 0,15$; двух $P_2 = 0,22$; трех $P_3 = 0,22$; четырех $P_4 = 0,16$ и т.д.

б) на основании анализа отчетных данных о требованиях на ремонт данного агрегата. При этом за определенное число смен, например, $C=100$, собираются сведения о числе требований на ремонт:

C_1 - число смен, когда требований не было;

C_2 - число смен с одним требованием;

C_3 - число смен с двумя требованиями и т.д.

$\omega_1 = \frac{C_1}{C} \approx P_1$ дает так называемую частоту или эмпирическую

вероятность, которую можно использовать в игре. В рассматриваемом примере на основании анализа отчетных данных установлено, что

132

ежедневно при ремонте требуется не более четырех агрегатов, причем вероятность того, что агрегаты не потребуются для ремонта в течение смены, равна $q_1=0,1$; потребуется один агрегат $q_2=0,4$; два- $q_3=0,3$; три - $q_4=0,1$ и четыре $q_5=0,1$.

4) Формирование стратегии сторон (табл. 30).

Стратегии производства (П) или требования рынка услуг определяются числом требуемых в течение смены агрегатов P_i . Причем первая стратегия P^1 состоит в том, что фактически для ремонта не потребуются агрегаты ($P^1=0$), вторая P_2 - один агрегат, P_3 - два агрегата, P_4 - три агрегата и P_5 - четыре агрегата ($P_6=4$).

При организации на складе запаса организаторы производства (сторона А) могут применить следующие стратегии: A_1 - не иметь запаса; A_2 - иметь один агрегат в запасе; A_3 - два; A_4 - три и A_5 - четыре агрегата. Так как потребность более четырех агрегатов за смену не была зафиксирована, то дальнейшее увеличение запасов априорно нецелесообразно. Причем определенные в табл. 30 вероятности q , следует рассматривать как вероятность реализации стратегий стороны П. Полученные таким образом результаты по P^1 , A , и q , сводят в таблицу стратегий сторон.

Таблица 30

Стратегии сторон игры

Производство (П)			Организаторы складского хозяйства (А)	
Обозначение	Необходимо агрегатов для	Вероятность данной по	Обозначение	Имеется из правных аг

Моделирование транспортных процессов

стратегии п,	ремонта, П)	требности, q,	стратегий, А;	агрегатов на складе, n _i
П1	0	0,1	А ₁	0
П ₂	1	0,4	а ₂	1
П ₃	2	0,3	А ₃	2
п ₄	3	0,1	а ₄	3
п ₅	4	0,1	А ₅	4

5) Определение последствий случайного сочетания стратегий сторон.

В реальных условиях сочетание стратегий A_j и I_{ij} случайно, но каждому сочетанию A_j и I_{ij} стратегий соответствуют определенные последствия b_{ij} . Например, если потребность в агрегатах для ремонта превышает их наличность на складе, то предприятие несет ущерб от дополнительного простоя автомобиля в ремонте (сокращение коэффициента технической готовности ay) или отказа клиенту в предоставлении соответствующей услуги. Если требований на замену

133

меньше, чем имеется агрегатов на складе, то возникают дополнительные затраты, связанные с хранением "излишних" агрегатов. Количественно последствия сочетания стратегий I_{ij} и A_j оценивается с помощью выигрыша b_{ij} (табл. 31), который относится на предприятие (A) и может исчисляться в рублях или условных единицах. Выигрыш $b_{ij} > 0$ называется прибылью, а $b_{ij} < 0$ убытком. Природа убытка и прибыли в каждом конкретном случае может быть различной, а сами величины ущерба и прибыли должны быть строго обоснованы, так как от них зависит выбор оптимального решения. В примере удовлетворение потребности в агрегатах связано с сокращением простоев автомобилей в ремонте или сохранением клиентуры, что приносит прибыль АТП или СТО. Излишний запас вызывает дополнительные затраты на хранение агрегатов (табл. 31).

Правило № 29. Четкое определение производственных ситуаций, стратегий сторон, вероятностей событий и их последствий является важнейшей инженерной задачей, и от качества ее выполнения зависит надежность и достоверность получаемых результатов, т.е., в конечном итоге, принимаемых решений.

Таблица 31

Условия определения выигрыша

Ситуации	Разовый выигрыш в условных единицах	
	Убыток	Прибыль
Хранение на складе одного, фактически невостребованного агрегата	$b_1 = -1$	-
Удовлетворение потребности в одном агрегате	-	$b_2 = +2$
Отсутствие необходимого для выполнения требования агрегата на складе	$b_3 = -3$	-

6) Определение выигрышей при всех возможных в рассматриваемом примере сочетаниях стратегий A_j и I_{ij} , в данном случае 25 ($A_j \times I_{ij} = 5 \times 5$). Например, сочетание стратегий A_3 и P_4 означает, что потребность в агрегатах для ремонта в течение данной смены составляет (ГЦ) $P_5 = 3$ агрегата, а на складе имеется (A_3) только один агрегат. Поэтому выигрыш (табл. 32) составит $b_{34} = 1 \times 2$ (при

Моделирование транспортных процессов

потребности 3 на складе имеется 1 агрегат) - 2×3 (две заявки не удовлетворены) = $2 - 6 = -4$; сочетание стратегий A_3 и P_6 (необходим для замены один агрегат, на складе имеется 3) $B^* = 1 \times 2$ (одно требование удовлетворено) - 2×2 (два агрегата не востребованы) = $2 - 2 = 0$ и т.д.

134

Выигрыши при сочетании всех возможных стратегий сторон сводятся в платежной матрице (табл. 32).

Фактически платежная матрица - это список всех возможных альтернатив, из которых необходимо выбрать рациональную стратегию A^*j организаторов производства.

Таблица 32

Платежная матрица

Необходимое число агрегатов и выигрыш при сочетании стратегий A_j и P_j							Минимальный выигрыш по стратегиям (минимумы строк), a_j	
Показатели оценки сочетания стратегий A_i P_i ,	$P_j \rightarrow$		P_1	P_2	P_3	P_4		P_5
	$n_i \rightarrow$		0	1	2	3		4
Имеющееся число агрегатов и выигрыш по стратегиям	A_i ↓	n_i ↓						
	A_1	0	0	-3	-6	-9	-12	Л 2
	A_2	1	-1	2	-1	-4	-7	-7
	A_3	2	-2	1	4	1	-2	-2
	A_4	3	-3	0	3	6	+ 3	-3
Максимальный выигрыш (максимумы столбцов), $(P_i)_{\max}$	A_5	4	-4	-1	2	5	8	-4
			0	2	4	6	8	

7) Выбор рациональной стратегии организаторов производства.

Наиболее простое решение возникает тогда, когда находится стратегия A_i , каждый выигрыш которой при любом состоянии I j не меньше, чем выигрыш при любых других стратегиях. В рассматриваемом примере таких стратегий нет. Например, стратегия A_3 лучше всех других только при состоянии P_3 , но хуже стратегии A_2 при состоянии P_2 и A_4 при состоянии P_4 и т.д.

В общем случае при известных вероятностях каждого состояния I j выбирается стратегия A_i при которой математическое ожидание выигрыша организаторов производства будет максимальным. Для этого

135

вычисляют средневзвешенный выигрыш по каждой строке платежной матрицы для i -й стратегии:

$$\bar{b}_i = q_1 b_{i1} + q_2 b_{i2} + \dots + q_n b_{in} = \sum_{j=1}^n q_j b_{ij}. \quad (34)$$

Например, для стратегии A_1 из таблиц 30, 31 имеем:

$$\bar{b}_1 = 0,1 \cdot 0 - 0,4 \cdot 3 - 0,3 \cdot 6 - 0,1 \cdot 9 - 0,1 \cdot 12 = -5,1.$$

Аналогично для A_2 имеем $\bar{b}_2 = -0,7$ и т.д.

Моделирование транспортных процессов

Полученные таким образом результаты сводим в матрицу выигрышей (последний столбец табл. 33).

Из матрицы выигрышей следует, что оптимальной стратегией, обеспечивающей максимальный средний выигрыш, является стратегия A^0_4 , т.е. необходимо постоянно иметь на складе 3 агрегата. Иными словами, если организаторы производства будут каждую смену придерживаться четвертой стратегии, то за ряд смен в конечном итоге они

получат следующий выигрыш: $(b_4)_{\max} = 1,5$ условные единицы. Но это не означает, что в отдельные смены при различном сочетании A_4 (3 агрегата на складе) и реальной потребности в агрегатах не может быть получен убыток, например, сочетание $A_4 P_1$ (табл. 32).

Таблица 33

Матрица выигрышей при исходном (I) варианте

rij (rij) Ai(rii)	Произведение $q_j \times b_j$					Средний выигрыш при стратегии, A_i, b_j
	P_1 ($n_1=0$)	P_2 ($n_2=1$)	P_3 ($n_3=2$)	P_4 ($n_4=3$)	P_5 ($n_5=4$)	
$A_1(n_1=0)$	0	-1,2	-1,8	-0,9	-1,2	-5,1
$A_2(P_2=1)$	-0,1	0,8	-0,3	-0,4	-0,7	-0,7
$A_3(P_3=2)$	-0,2	0,4	1,2	0,1	-0,2	1,3
$A_4(n_4=3)$	-0,3	0	0,9	0,6	0,3	$ 1,5 = (b_4)_{\max}$
$A_5(P_5=4)$	-0,4	-0,4	0,6	0,5	0,8	1,1
Вероятности состояний, q_j	0,1	0,4	0,3	0,1	0,1	-

n_j - необходимо иметь на складе исправных агрегатов
 n_i - фактически имеется на складе исправных агрегатов

8) Полученные результаты по изменению выигрыша в зависимости от запаса агрегатов на складе (стратегий A) изображаем графически (1, рис. 36).

9) Определение экономического эффекта от использования оптимальной стратегии.

Особенность выполненного расчета состоит в том, что учитывалась не только вероятность определенной потребности в агрегатах,

136

но и последствия их наличия или отсутствия на складе. Поэтому экономическая эффективность может быть получена сравнением выигрыша при оптимальной стратегии $B_0 = b_{\max}$ с выигрышем B_c , который может быть получен при поддержании на складе средневзвешенной потребности в агрегатах P_c , когда последствия принимаемых решений не учитываются (табл. 31).

$$\bar{n}_c = \sum_{j=1}^j q_j n_j, \quad (35)$$

где P_j - потребность в агрегатах на складе;

q_j - вероятность этой потребности.

В примере: $\bar{p}_c = 0,1 \times 0 + 0,4 \times 1 + 0,3 \times 2 + 0,1 \times 3 + 0,1 \times 4 = 1,7$ агрегата.

Выигрыш, условные единицы

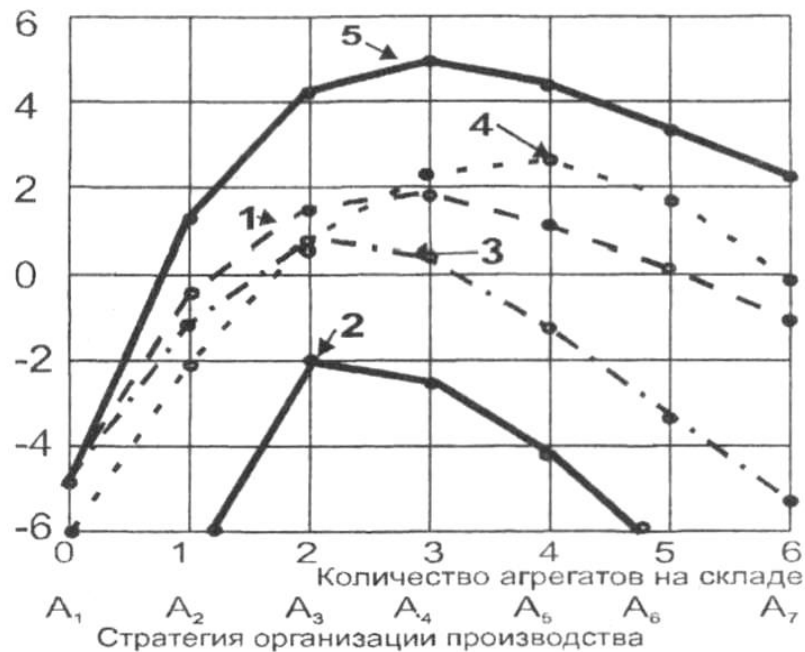


Рис. 36. Определение оптимального запаса агрегатов методами игровых ситуаций:

- 1 - при принятии решения в условиях риска (I вариант. Табл. 33);
- 2 - принятие решений в условиях неопределенности с использованием максиминного критерия;
- 3 - принятие решений в условиях риска при росте убытка от хранения невостребованного агрегата в два раза (V вариант);
- 4 - принятие решений в условиях неопределенности при равных вероятностях состояния производства (принцип Лапласа);
- 5 - принятие решений в условиях риска при росте дохода от своевременной замены агрегатов в два раза (II вариант).

137

Принимаем целое значение средневзвешенной потребности $\bar{p}'_c \approx 2$. Наличие на складе двух агрегатов соответствует стратегии A_3 , при которой обеспечивается средний выигрыш $\bar{b}_3 = 1,3$ условные единицы (табл. 33).

Таким образом экономический эффект при использовании оптимальной стратегии составляет:

$$\varepsilon(A^0) = 100 \frac{\bar{b}_0 - \bar{b}_c}{\bar{b}_0} = 100 \frac{1,5 - 1,3}{1,3} = 15,4\% \quad (36)$$

10) Анализ полученных решений. Данные табл. 33 и рис. 36 позволяют сделать следующие практические выводы.

Во-первых, определена оптимальная стратегия (A^0), придерживаясь которой организаторы производства получают гарантированный выигрыш в 1,5 условные

Моделирование транспортных процессов

единицы. Очевидно, наличие на складе 3 агрегатов является заданным целевым нормативом для организаторов складского хозяйства предприятия $ЦН = П_4 = 3$ агрегата. Как следует из рис. 36, нецелесообразным является не только сокращение по сравнению с оптимальным, но и чрезмерное увеличение оборотного фонда. Необходимо еще раз отметить, что стратегия A^04 является оптимальной при многократном ее применении, т.е. в среднем для повторяющихся ситуаций. Для разовых реализаций она может быть и неоптимальной. Например, при ГЦ (исходный вариант) она дает убыток, а для П5 прибыль будет меньше, чем при использовании стратегии $A5$.

Во-вторых, выявлена зона рационального запаса агрегатов на складе, при котором предприятию гарантирован доход, т.е. $b_i > 0$. Такой зоной является наличие на складе $П_i = 3+1$ агрегатов, что соответствует стратегиям A_3, A^04, A_5 . Эту зону следует рассматривать в качестве интервальной оценки целевого норматива (см. рис. 36) для организаторов складского хозяйства.

В-третьих, создается инструментальная база для определения размера материального поощрения предприятием организаторов складского хозяйства, которое должно быть пропорционально фактически полученному предприятием доходу от удовлетворения потребности в агрегатах. Очевидно, при поддержании на складе запаса в 3 агрегата материальное поощрение будет максимальным. Если на складе оказалось 2 агрегата, то размер материального поощрения сокращается пропорционально $D = 1,5 - 1,3 = 0,2$, а при наличии на складе 4 агрегатов - еще больше - $D = 1,5 - 1,1 = 0,4$. Наличие на складе менее 2 и более 4 агрегатов может привести к материальной санкции к организаторам складского хозяйства или партнерам (дилерам, дистрибьюторам).

В-четвертых, используя данный метод, можно оценить влияние Ряда факторов на выбор стратегии и величину выигрыша. Как следует из табл. 34 и рис. 36, изменение стоимости хранения агрегатов (b_i),

138

убытка или прибыли при наличии ($b_г$) и отсутствии ($b_з$) агрегата на складе в весьма значительных пределах (от 130 до 200%) мало влияет на рациональную стратегию, которая, таким образом, является устойчивой. Вместе с тем величина убытка или прибыли оказывает существенное влияние на конечный выигрыш организаторов производства, максимальное значение которого по вариантам различалось в пределах 7-и условных единиц.

Таблица 34
Матрица выигрышей при изменении различных стоимостных затрат

Количество агрегатов на складе	b_i A_i	Выигрыш при вариантах				
		I	II	III	IV	V
n_i	b_1	-1	-1	-1	-2	-2
	b_2	+2	+4	+3	+4	+2
	b_3	-3	-3	-4	-3	-3
0	A_i	-5,1	-5,1	-6,8	-5,1	-5,1

Моделирование транспортных процессов

1	A ₂	-0,7	1,1	-0,2	1,0	-1,6
2	A ₃	1,3	4,1	2,4	3,9	0,7
3	A ₄	1,5	4,7	3,3	2,8	0,6
4	A ₅	1,1	4,5	2,8	2,2	-1,2
5	A ₆	0,1	3,5	1,8	0,2	-3,2
6	A ₇	-0,9	2,5	0,3	-1,8	-3,4
Оптимальная стратегия	-	A°<	a° ₄	A°.	A°з	A°з
Выигрыш при оптимальной стратегии	-	1,5	4,7	3,8	3,9	0,7

Например, увеличение прибыли от своевременного обслуживания автомобилей в два раза (с $b_2=2$ до 4) увеличивает максимальный выигрыш при оптимальной стратегии предприятия в 3,1 раза с 1,5 (I исходный вариант) до 4,7 условных единиц (табл. 34). Если при этом возрастут в два раза и затраты на хранение агрегата, то максимальный выигрыш также увеличится по сравнению с исходным вариантом в 2,6 раза (с 1,5 до 3,9). Одновременно изменится и оптимальная стратегия. При удорожании стоимости хранения агрегатов на складе экономически выгодной будет стратегия A₃, т.е. необходимо иметь на складе не 3, а 2 агрегата. Следовательно в условиях самокупаемости особенно важным является правильное определение всех затрат, влияющих на выигрыш организаторов производства.

Таким образом, сбор и использование информации о предполагаемых последствиях принимаемых решений позволяют выбрать из имеющихся альтернатив наилучшее решение, т.е. определить для соответствующей подсистемы обоснованный целевой норматив.

Естественно, что в примере рассмотрен простейший вариант, иллюстрирующий суть и возможности метода. В практических приложе-

139

ниях было бы целесообразным учесть сезонные, месячные, а возможно, и дневные колебания спроса на ремонт, возможность сезонных колебаний стоимостей простоев автомобиля и цены избыточного запаса агрегатов, различное отношение клиентуры к цене простоя автомобилей в летнее и зимнее время и т.д. Все это представляется возможным оценить данным методом, изменяя соответственно заданные условия (табл. 30 - 34).

Вопрос 3. Принятие решений в условиях неопределенности.

Эти условия отличаются от принятия решений в условиях риска тем, что информация о состоянии природы $I \sim I_j$ отсутствует (qr?). В этом и состоит неопределенность задачи. Продолжим рассмотрение примера (§ 24) с теми же исходными данными (кроме C_j).

Наиболее распространены следующие методы принятия решений в условиях неопределенности при играх с природой.

1) Сведение неизвестных вероятностей q_j к известным, т.е. переход к задаче принятия решений в условиях риска. Наиболее простой способ - это принцип недостаточного основания Лапласа, в соответствии с которым ни одному из j состояний природы $i \sim I_j$ не отдается предпочтения и для них назначается равная вероятность, т.е. $q_1=q_2=q_3=\dots=q_j = 1/j$ для всех состояний.

Моделирование транспортных процессов

В соответствии с этим принципом для рассматриваемого по запасу агрегатов примера ($j=5$) все вероятности должны быть приняты равными 0,2. При этом оптимальной явится стратегия A_5 , т.е. необходимо иметь в обороте в среднем не 3, а 4 агрегата. Фактически вероятности состояний природы P_j существуют (табл. 30), но они неизвестны организаторам производства. Поэтому организаторы производства применили принцип Лапласа.

Следовательно, применяя стратегию A_5 , организаторы производства получают средний выигрыш только $bs = 1,1$ условную единицу (табл. 33).

Таким образом, отсутствие информации о вероятностях распределения действительной потребности в агрегатах для ремонта стоит (в рассмотренном примере) содержания дополнительного агрегата в обороте, что соответствует потере 27% выигрыша (или 1,1 вместо 1,5) при оптимальной стратегии и известных вероятностях состояний f_{lj} (табл. 33).

2) Если информация о вероятности состояний I_j отсутствует, то события на основании ранее накопленного опыта могут быть ранжированы, т.е. расположены в порядке убывания (или возрастания) вероятностей, например, с использованием экспертного метода. При этом ранги переводятся в места и по формуле (27) определяются вероятности.

140

После определения вероятностей q_j , расчет проводится по методике принятия решений в условиях риска.

3) Если вероятности состояния системы P_j не могут быть определены или оценены рассмотренными способами, то применяют специальные критерии: максиминный, минимаксный и промежуточный.

Максиминный критерий K_i (Вальда) обеспечивает выбор стратегии A_i , при которой в любых условиях гарантирован выигрыш, не меньший максиминного:

$$K_i = \alpha = \max_i \alpha_i = \max_i \min_j b_{ij} \quad (37)$$

Для определения такой стратегии по платежной матрице (табл. 32) определяют для каждой стратегии организаторов производства A_i минимальный выигрыш α_i , т.е. $(X_j = \min b_{ij})$. Для этого в платежной матрице (табл. 32) для каждой стратегии A_i просматривают строку данных и выбирают минимальный выигрыш. Например, для стратегии A_1 : $\alpha_1 = \min b_{1j} = -12$; для стратегии A_5 : $\alpha_5 = \min b_{5j} = -4$ и т.д. Далее из минимальных значений выигрышей выбирают максимальный, которому и соответствует рациональная стратегия организаторов производства. Таким выигрышем является $K_i = -2$, а ему соответствует стратегия A_3 , т.е. на складе надо иметь 2 агрегата. Эта стратегия, как следует из матрицы выигрышей, фактически может обеспечить средний выигрыш 1,3 условные единицы или на 13% меньше, чем при наличии информации о состоянии природы.

Правило № 30. Максиминный критерий K_i основан на наиболее пессимистической оценке возможных производственных ситуаций и гарантирует организаторам производства выигрыш не менее величины этого критерия.

Действительно, если придерживаться выбранной стратегии A_3 , то выигрыш всегда будет равен или больше K_j , т.е. $b_{3j} \geq K_i$; $b_{31} = -2 = K_i$; $b_{32} = 1 > K_i$; $b_{33} = 4 > K_i$; $b_{34} = 1 > K_i$; $b_{35} = -2 = K_i$.

Этот критерий применяется при рискованных операциях на рынке, при освоении новых ниш на рынке товаров и услуг, апробации принципиально новых технологий и изделий большой стоимости.

Моделирование транспортных процессов

Минимаксный критерий Кц (Сэвиджа) обеспечивает выбор такой стратегии, при которой величина риска будет минимальной в наиболее неблагоприятных производственных условиях:

$$K_{\text{ц}} = \min_i \max_j r_{ij}. \quad (38)$$

Выбирая ту или иную стратегию поведения на производстве или рынке, организаторы производства рискуют. Применительно к рассматриваемой ситуации риск - это разница между максимальным

141

выигрышем при известном состоянии производства (природы) и использовании оптимальной стратегии и неизвестном состоянии, когда могут быть применены другие стратегии A_i :

$$r_{ij} = (\beta_i) \max - b_{ij}. \quad (39)$$

Для определения риска организаторов производства (сторона А) при применении стратегии A_i по платежной матрице (табл. 32) рассчитывают выигрыш b_{ij} при заранее известном состоянии А состоянии природы $I \sim j$. Например, если бы было известно, что в очередную смену потребуется при ремонте один агрегат (P_2), то наибольший выигрыш АТП будет получен, если на складе имеется именно один агрегат (A_2), т.е. $b_{22} = (Pr) \max = 2$.

Для каждой стратегии производства $I \sim j$ $(P_i) \max$ определяется просмотром столбцов платежной матрицы и выбором из них максимального значения b_{ij} . Это максимальные выигрыши при известном состоянии производства P_i . Но если фактическое состояние производства неизвестно ($P_i = ?$), то ему может быть противопоставлена любая из стратегий организаторов производства A_i . Например, при стратегии A_i и P_2 риск $r_{i2} = ((3_2) - b_{i2}) = 2 - (-3) = 5$; при стратегиях A_4 P_2 риск $r_{42} = (p_2) - b_{42} = 2 - 0 = 2$ и т.д. Полученные данные сводят в матрицу риска (табл. 35), в которой для каждой стратегии A_i определяют максимальный риск (последний столбец в матрице риска).

Из всех стратегий организаторов производства выбирают ту, которая обеспечивает минимальное значение максимального риска. В примере такой стратегией является A_5 , т.е. надо иметь на складе 4 агрегата при $K_{\text{ц}} = 4$.

Таблица 35

Матрица риска

$\backslash j$ A_j	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	Максимум риска при A_i, H_i
A_1	0	5	10	15	20	20
A_2	1	0	5	10	15	15
A_3	2	1	0	5	10	10
A_4	3	2	1	0	5	5
A_5	4	3	2	1	0	4 = $K_{\text{ц}}$
	0	2	4	6	8	-

Правило № 31. При минимаксной стратегии величина риска будет минимальной в наиболее неблагоприятных условиях, т.е. предприятие гарантировано от чрезмерных потерь.

142

Моделирование транспортных процессов

Коэффициент d устанавливается на основании опыта или экспертизы в пределах $0 < d < 1$: причем чем серьезнее последствия принимаемых решений, тем больше d . При $d=0$ имеет место сверхоптимизм, а при $d=1$ критерий превращается в K_I (формула 37).

Сравнение выбранных различными методами стратегий показывает, что в условиях неопределенности, применяя соответствующие методы и критерии, можно выявить стратегии, весьма близкие к оптимальным. Так, применительно к рассмотренному примеру все три выбранные различными методами стратегии A_3 , A_4 , A_5 (иметь запас в 2, 3 и 4 агрегата) обеспечивают положительный, хотя и неравноценный выигрыш: 1,3; 1,5 и 1,1 условные единицы.

Правило № 32 Для больших систем свойственно достаточно

плавное протекание целевой функции, при котором вокруг оптимального решения образуется широкая зона рациональных решений, придающая устойчивость самой системе.

Вопрос 4. Особенности принятия решения в конфликтных ситуациях

В конфликтных (антагонистических) играх сталкиваются две или несколько противоборствующих сторон, имеющих свои интересы и стремящихся улучшить свое положение за счет других. Например, борьба на ограниченном спросом рынке группы предприятий (АТП, СТО) за клиентуру. Обычно множественную игру стремятся свести к серии парных, в которых участвуют две стороны, условно называемые "нападающей" А и "обороняющейся" В.

Нападающая сторона первой предпринимает определенные действия (выпуск новых изделий, услуг, изменение ценовой политики и т.п.) и стремится получить определенный выигрыш. Если выигрыш одной стороны равен проигрышу другой, то это игры с нулевой суммой-

$$K_{II} = \max_i \left[d \min_j b_{ij} + (1-d) \max_j b_{ij} \right] \dots \quad (40)$$

Действительно, если в условиях неопределенности придерживаться этой стратегии (A_5), то минимальный выигрыш по платежной матрице составит $b_{51} = -4$. Для всех остальных стратегий производства Неминимальный выигрыш будет больше. Следовательно, предприятие или предприниматель, используя этот критерий, застрахован от чрезмерных потерь.

Действительно, при $A_5 \Pi_2 : b_{52} = -1 > K_{II}$; при $A_5 \Pi_3 : b_{53} = 2 > K_{II}$;
при $A_5 \Pi_4 : b_{54} = 5 > K_{II}$; при $A_5 \Pi_5 : b_{55} = 8 > K_{II} = -4$.

Критерий пессимизма-оптимизма (Гурвица) ориентирован на выбор в качестве промежуточного между двумя рассмотренными стратегиями:

143

В конфликтных играх также строят платежные матрицы, аналогичные табл. 32, но вместо стратегий F_{ij} природы указываются стратегии противоборствующей стороны V_j . Если сторона В выбирает j - стратегию, она должна ориентироваться на максимальный проигрыш $(P_i) \max_i$ приведенный в последней строке платежной матрицы (табл. 32). Из всех максимальных выигрышей, естественно, сторона В должна выбрать минимальный $\min_j \max_i b_{ij}$. Этот проигрыш стороны В будет верхним пределом выигрыша стороны А и называется верхней ценой игры

$$\beta = \min_j \max_i b_{ij}. \quad (41)$$

Фактическая цена конфликтной

игры заключается в интервале

$$\alpha \leq K_{IV} \leq \beta.$$

Принцип осторожности, вытекающий из предположения о разумности сторон, стремящихся в конфликтной ситуации достигнуть цели, противоположной цели противостоящей стороны, называется в теории игр принципом минимакса.

Если нижняя и верхняя цены в конфликтной игре равны, т.е. $\alpha = \beta$, то она называется игрой с седловой точкой, а цена такой игры $K_V = \alpha = \beta$

называется чистой. Седловой точке соответствует пара минимаксных

стратегии A^0_i и B^0_j , являющихся оптимальными, а их совокупность называется решением игры. Решение игры обладает следующим свойством: если одна сторона в конфликтной игре придерживается своей оптимальной стратегии, то для противоборствующей стороны нецелесообразно отклоняться от своей оптимальной стратегии. Любое отклонение от оптимальных стратегий или оставит результаты игры без изменения или ухудшит его для стороны, отошедшей от оптимального решения.

Таким образом, чистая цена конфликтной игры с седловой точкой K_V определяет тот порог выигрыша, который в игре против разумного противника сторона А не может увеличить, а сторона В - уменьшить. Если верхняя и нижняя цены игры не равны, то сторона А может сформировать такую стратегию, которая дает выигрыш больше нижней цены, т.е. $K_{IV} > \alpha$. Это достигается применением так называемых смешанных стратегий. В смешанной стратегии варианты А, имеют определенную вероятность и выбираются с помощью специального механизма (случайные числа, бросание монеты, извлечение № варианта из урны и др.) в случайном порядке. Это придает тактике стороны А гибкость, изменчивость, и сторона В не может знать заранее, с какой ситуацией ей придется столкнуться. Если стратегии А, стороны А имеют вероятность, отличную от нуля, то они называются активными. Существует следующее правило активных стратегий.

144

Правило № 33. Если одна из сторон в конфликтной игре придерживается своей оптимальной смешанной стратегии, то выигрыш остается неизменным и больше нижней цены игры $K_{IV} > \alpha$, независимо от действий противоположной стороны, придерживающейся своих активных стратегий.

При формировании платежной матрицы (аналогичной табл. 32) результаты сочетаний стратегий АВ, могут определяться не только денежным выигрышем, но и другими показателями. Например, изменением вероятности или времени достижения поставленной цели; увеличением (уменьшением) объемов предоставляемых услуг; изменением размера сектора рынка услуг, обслуживаемого данным предприятием, и т.д.

Контрольные вопросы:

1. Объясните природу убытка и прибыли при конструировании игры, моделирующей определенные запасы топлива на АЗС. Какова при этом целевая функция производства?

Моделирование транспортных процессов

2. Каковы потери понесет производство, если его организаторы будут придерживаться стратегии A_i в рассмотренном примере?
3. Чем можно объяснить разницу при определении запасов по средневзвешенной потребности (формула 35) и решением, полученным в условиях риска?
4. Объясните причины изменения средних выигрышей при разных стратегиях организаторов производства для случаев 1 и 4 (рис. 36 Пособия).
5. Какова размерность риска в минимаксном критерии?